Міністерство освіти і науки України
Департамент науки і освіти
Харківської обласної державної адміністрації
Комунальний заклад
«Харківська гуманітарно-педагогічна академія»
Харківської обласної ради

ДИСКРЕТНА МАТЕМАТИКА

Навчальний посібник

Частина І

Елементи теорії множин та математичної логіки

Харків
2018

УДК 378.016:510.3:510.6 (075)
Д 48

Укладачі:

Бородай Г. П. – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри математики та фізики Комунального закладу «Харківська гуманітарно-педагогічна академія» Харківської обласної ради

Дригач Т. Г. – кандидат педагогічних наук, старший викладач кафедри математики та фізики Комунального закладу «Харківська гуманітарно-педагогічна академія» Харківської обласної ради;

Рецензенти:
Босін М. Є. – доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри математики та фізики Комунального закладу «Харківська гуманітарно-педагогічна академія» Харківської обласної ради;

Курпа Л. В. – доктор технічних наук, завідувач кафедри прикладної математики Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут».

Д 48 Дискретна математика: навч. посібник / Г. П. Бородай, Т. Г. Дригач; Комунальний заклад «Харківська гуманітарно-педагогічна академія». – Харків, 2018.– Ч.1: Елементи теорії множин та математичної логіки. – 121 с.

Перша частина навчального посібника розроблена відповідно до вимог освітньо-професійної програми підготовки фахівців за освітньо-кваліфікаційним рівнем бакалавр напряму підготовки 014.09 Середня освіта (Інформатика) з навчальної дисципліни «Дискретна математика».

Наведені основні поняття теорії множин, означення операцій над ними, закони алгебри множин та їх застосування.

Поряд з основами класичної логіки висловлювань та предикатів і правилами виведення в логіці висловлювань та предикатів розглядається застосування алгебри висловлювань до синтезу й аналізу схем дискретної дії.

Основні поняття та теореми ілюструються великою кількістю докладно розв’язаних прикладів. Розв’язання наведених у посібнику завдань є необхідним для засвоєння матеріалу.

УДК 378.016:510.3:510.6 (075)

Рекомендовано до друку Науково-методичною радою Комунального закладу «Харківська гуманітарно-педагогічна академія» Харківської обласної ради
(Протокол № 2 від 10.10.2018 р.)

Зміст

ПЕРЕДМОВА

Дискретна математика – галузь математики, що вивчає властивості дискретних структур. До таких структур, як правило, належать скінченні групи (множини), скінченні графи, деякі математичні моделі перетворювачів інформації.

Якщо у XVIII та XIX ст. ця наука була сферою зацікавлення лише вузького кола фахівців, то у XX ст. та дотепер дискретна математика перетворюється в наукову дисципліну, яка знаходить практичне застосування у розмаїтих сферах та галузях науки, техніки, технології. Сучасний період можна вважати одним із найінтенсивніших у її розвитку: дуже швидко розширюється сфера застосування, інтенсивно зростають обсяги нової інформації та кількість отриманих внаслідок цього результатів. І цей процес є закономірним, адже швидкісні та якісні технології опрацювання інформації становлять основу сучасного світу. А подання інформації до ЕОМ є дискретним, її обробка складається з послідовностей елементарних перетворень тих чи інших інформаційних одиниць. Тому саме конструкції дискретної математики, такі як алгебра, формула, множина, автомат, граф, алгоритм тощо, і є найактуальнішими об'єктами сучасних досліджень.

В посібнику подані такі розділи дискретної математики: теорія множин, комбінаторика, алгебра логіки та теорія графів. Матеріал скомпоновано таким чином, що кожен із розділів розбитий на лекційно-практичні теми (підрозділи), до яких подано теоретичні відомості та приклади розв'язування типових завдань. У кінці кожного розділу наводяться перелік теоретичних запитань для самоконтролю. Окремо подані практичні завдання для самостійної роботи студентів, які можна використати як для роботи на практичних заняттях, так і для домашнього опрацювання матеріалу.

Розділ 1. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ МНОЖИН

1.1. Множини

У повсякденному житті і практичній діяльності часто потрібно говорити про деякі сукупності різних об'єктів, предметів, понять, чисел, символів тощо. Наприклад, сукупність деталей механізму, аксіом геометрії, чисел натурального ряду, літер алфавіту. На основі інтуїтивних уявлень про такі сукупності сформувалося математичне поняття множини. Великий внесок в теорію множин зробив Георг Кантор: «Множина – це багато, що мислиться як єдине ціле». Пізніше, завдяки його дослідженням, теорія множин стала повністю визначеним та обґрунтованим розділом математики, а у теперішній час набула фундаментального значення. Теорія множин є основою для усіх розділів дискретної математики та комп'ютерних наук в цілому, є однією з основ функціонального аналізу, топології, загальної алгебри. Сьогодні проводяться глибокі дослідження у самій теорії множин, що пов'язані з основами математики.

Теорія множин разом із іншими розділами дискретної математики має багато корисних застосувань у програмуванні. Наприклад, вона використовується для побудови систем керування базами даних, при розбудові та організації роботи комп'ютерних мереж, мережі Інтернет.

Множина – це сукупність (система) будь-яких об'єктів довільної природи, що мають деяку загальну ознаку та розглядаються як єдине ціле.

Множини позначають великими літерами латиниці, рідше кирилиці.

Множина задана (визначена), якщо про будь-який об'єкт можна сказати, чи належить він цій множині, чи ні.

Об'єкти, що утворюють множину, будемо називати *елементами* множини і позначати відповідними малими літерами. Якщо елемент a належить множині A, це позначається так: $a \in A$, в іншому випадку пишуть $a \notin A$.

Приклад 1.1. M – множина цілих чисел від 0 до 12. Тоді $5 \in M$**,** $15 \notin M$**.**

Деякі множини мають загальновизнані позначення:

N – множина натуральних чисел,

Z – множина цілих чисел,

Q – множина раціональних чисел,

R – множина дійсних чисел,

C – множина комплексних чисел.

1.2. Способи визначення множин

Множину можна визначити:

1) переліком усіх об'єктів, що входять до неї (елементів множини).

Приклад 1.2.1. $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ **–** множина десятинних цифр; $M = \{2,4,6,8,...\}$ – множина парних чисел;

2) описом властивостей, які мають елементи множини.

Приклад 1.2.2. Множину парних чисел, що менші 10, можна задати так: $M = \{2,4,6,8\}$ або $M = \{m \mid m = 2n, де\ n - ціле, 1 \le n \le 4\}$, причому справа від вертикальної риски вказана властивість елементів цієї множини (це аналітичне задання множини).

Множина, що не містить жодного елемента, називається порожньою та позначається $\varnothing$**.**

Приклад 1.2.3. Порожні множини:

1) множина квадратних тричленів, що мають більше двох коренів;

2) множина живих людей, вік яких більше 1000 років;

3) множина слонів, що літають.

Множина називається **скінченною,** якщо кількість її елементів виражається деяким числом. Множина, яка не є скінченною, називається **нескінченною.** **Злічена** множина – це множина, усі елементи якої можна перенумерувати $\{a_1, a_2, ...\}$. **Потужністю множини** називається кількість елементів скінченної множини і позначаться $|A|$.

Приклад 1.2.4. 1) $|\varnothing| = 0$; 2) $|\{a,b,c,d\}| = 4$; 3) $\mathbf{N}$ – нескінченна злічена множина.

1.3. Підмножини

Будь-яку частину A' множини *A*, що вибрана за певною ознакою, називають **підмножиною** і позначають $A' \subset A \Leftrightarrow \{a \in A' \Rightarrow a \in A\}$. Також запис $A \subset B$ може називатися **«включення»** і читатися «*A* міститься (входить) у *B*», «*B* містить *A*».

Приклад 1.3.1.

Включення $A \subset B$ правильне для множин $A = \{2,4\}$, $B = \{1,2,3,4\}$.

Приклад 1.3.2.

Множина *A* складається з усіх геометричних фігур,

множина *B* складається з усіх чотирикутників,

множина *C* складається з усіх паралелограмів,

множина *D* складається з усіх прямокутників,

множина *E* складається з усіх квадратів.

Кожна наступна множина є підмножиною попередньої:

$$A \supset B \supset C \supset D \supset E.$$

Приклад 1.3.3.

$$N \subset Z \subset Q \subset R \subset C$$

Із визначення підмножини бачимо, що будь-яка множина є підмножиною самої себе: $A \subset A$. Будемо вважати, що порожня множина $\varnothing$ є підмножиною будь-якої множини: $\varnothing \subset A$. Виключивши ці граничні випадки (тобто $\varnothing$, *A*), ми отримаємо так звані **власні підмножини** множини *A*, тобто такі, що не є порожніми та не збігаються з *A*.

Множини A і B *рівні*, якщо одночасно: $A \subset B$ і $B \subset A$ (тобто будь-який елемент A належить B і навпаки). Позначення рівності $A = B$. У випадку рівності множини A і B складаються з одних і тих самих елементів.

Для включення множин справедлива властивість **транзитивності:** якщо $A \subset B$ і $B \subset C$, то $A \subset C$.

Сімейством множини A або **булєаном** A називають множину, елементами якої є тільки усі підмножини множини A. Позначають булєан $B\{A\}$, множину B при цьому називають **простором** і позначають L.

Зазвичай усі множини, з якими мають справу в тому чи іншому випадку, є підмножинами деякої фіксованої множини I. **Універсальною** називається множина, яка містить усі можливі елементи, що зустрічаються в даній задачі. Універсальна множина позначається символом **I**. Очевидно, що $A \subset I$.

1.4. Операції над множинами. Діаграми Ейлера-Венна

Множини можна комбінувати між собою та отримувати інші множини. Серед незчисленної кількості можливих способів комбінування

деякі виявились корисними.

1. Об’єднання (сума*)* двох множин A і B – це множина C, яка складається з усіх тих елементів, що належать хоча б одній з множин A і B.

Позначення: $C = A \cup B = A + B$.

$$A + B = A \bigcup B \overset{def}{=} \{c_i \mid c_i \in A \ \underline{\text{або}}\ c_i \in B\}.$$

Елементи, що входять до об’єднання множин, треба враховувати лише один раз.

Приклад 1.4.1.

1) $A = \{1; 2; 3\}$, $B = \{2; 3; 4; 5\}$, тоді $C = A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5\}$;

2) $A = (-\infty; 2]$, $B = (1; +\infty)$, тоді $C = A \cup B = R$;

3) якщо A – множина студентів, що не склали перший іспит, B – другий, то $A \cup B$ – множина студентів-боржників після двох іспитів (не виключено, що хтось не склав обидва іспити).

2. Перетин (добуток) A і B – це множина C, яка містить лише елементи, що входять до A і B **одночасно**.

Позначення: $C = A \cap B$.

$$A \bigcap B \overset{def}{=} \{c_i \mid c_i \in A \text{ і } c_i \in B\}.$$

Приклад 1.4.2. Нехай $A = \{1; 2; 3\}$, $B = \{2; 3; 4; 5\}$, $D = \{10; 11\}$, тоді $C = A \cap B = \{2; 3\}$, $A \cap D = \varnothing$.

Аналогічно визначаються об’єднання та перетин для будь-якої кількості множин $A_1, A_2, \ldots, A_k, \ldots$.

3. Різниця множин A і B – це множина C, що містить усі елементи множини A, що не входять до множини B.

Позначення: $C = A \setminus B$.

$$A \setminus B \overset{def}{=} \{c_i \mid c_i \in A \text{ і } c_i \notin B\}$$

Приклад 1.4.3.

1) R \ Q – множина ірраціональних чисел, а Q \ R =$\varnothing$;

2) різницею множин $A = [1,4]$ і $B = [2,3]$ є множина A \ B = $\varnothing$;

3) різницею множин $B = \{2,4,6,8\}$ і $A = \{1,2,3,4\}$ є множина $B \setminus A = \{6,8\}$.

4. Симетричною різницею множин A і B називається множина

$$A \Delta B \overset{def}{=} (A \setminus B) \bigcup (B \setminus A).$$

5. Доповнення до множини визначається як

$$\overline{A} = I \setminus A \overset{def}{=} \{a_i \mid a_i \notin A\}.$$

Приклад 1.4.4. I – множина студентів у групі. A – множина студентів, що склали перший іспит, тоді $\overline{A}$– множина студентів, що **не** склали перший іспит.

Дії над множинами мають наочний вигляд за допомогою діаграм, на яких множини зображені у вигляді кола і ті області, де розташовані потрібні елементи, виділені кольором (рисунок 1.1). Ці діаграми мають назву **діаграми Ейлера-Венна.**

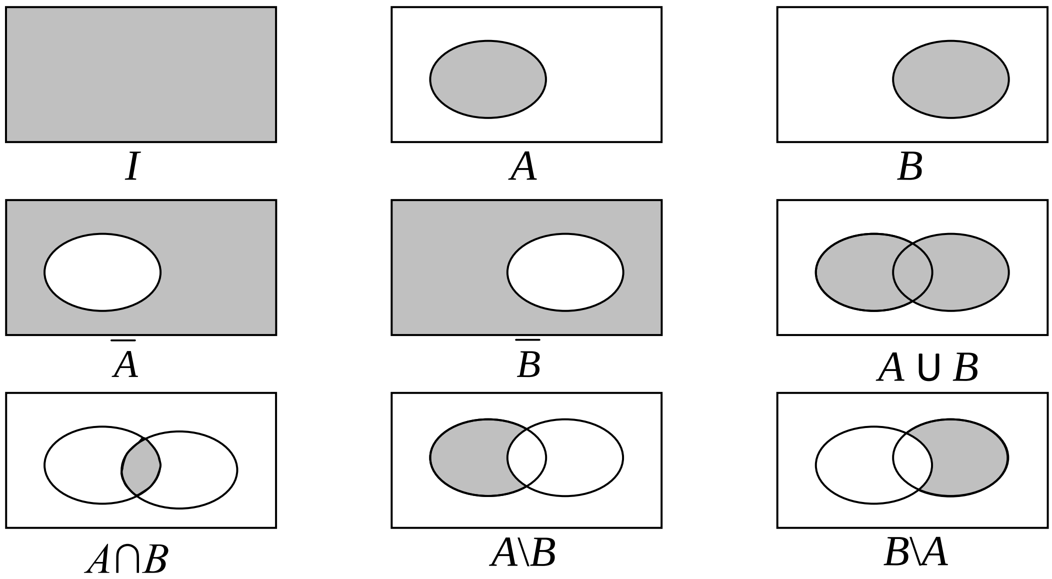


Рис. 1.1.

Є також інший спосіб проілюструвати операції над множинами. Це так звана **таблиця надходження елементів у множину,** у якій розглядаються усі можливі випадки входження обраного елемента до множин A і B та їхні комбінації. Результат належності цього елемента множинам A і B відмічають у перших двох стовпчиках таблиці за правилом: 1 – якщо елемент входить до даної множини, 0 – якщо не входить. Маємо чотири випадки або чотири рядки у таблиці. Стовпчики, що відповідають операціям $\overline{A}$, $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, заповнюємо згідно з визначенням цих операцій (таблиця 1.1). Наприклад, другий рядок у таблиці 1.1 читається так: якщо елемент входить до A, але не входить до B, то він не входить до $\overline{A}$, входить до $A \cup B$, не входить до $A \cap B$, але входить до $A \setminus B$.

Таблиця 1.1.

A	B	$\overline{A}$	$A \bigcup B$	$A \bigcap B$	$A \setminus B$
1	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	1
0	1	1	1	0	0
0	0	1	0	0	0

1.5. Основні закони операцій над множинами

1. Закони комутативності

$$A \bigcup B = B \bigcup A; \qquad A \bigcap B = B \bigcap A);$$

2. Закони асоціативності

$$A \bigcup (B \bigcup C) = (A \bigcup B) \bigcup C; \qquad A \bigcap (B \bigcap C) = (A \bigcap B) \bigcap C;$$

3. Закони ідемпотентності

$$A \bigcup A = A; \qquad A \bigcap A = A;$$

4. Закони дистрибутивності перетину щодо об'єднання та об'єднання щодо перетину

$$A \bigcap (B \bigcup C) = (A \bigcap B) \bigcup (A \bigcap C) \qquad A \bigcup (B \bigcap C) = (A \bigcup B) \bigcap (A \bigcup C);$$

та закони дистрибутивності різниці

$$(A \setminus B) \bigcap C = (A \bigcap C) \setminus B = (A \bigcap C) \setminus (B \bigcap C), \quad A \setminus B = A \setminus (A \bigcap B);$$

5.Закони де Моргана

$$\overline{(A \bigcup B)} = \bar{A} \bigcap \bar{B}; \qquad \overline{(A \bigcap B)} = \bar{A} \bigcup \bar{B};$$

6. Закони поглинання

$$A \bigcup (A \bigcap B) = A; \qquad A \bigcap (A \bigcup B) = A$$

7. **Операції з універсальною, довільною та порожньою множинами**

7.1. $A \bigcup \varnothing = A;$ $\qquad A \bigcap I = A;$

7.2. $A \bigcup \overline{A} = I$; $\quad A \bigcap \overline{A} = \varnothing$.

7.3. $A \bigcup I = I$; $\quad A \bigcap \varnothing = \varnothing$.

7.4. $\overline{\varnothing} = I$; $\quad \overline{I} = \varnothing$;

7.5. $A \setminus \varnothing = A$; $A \setminus I = \varnothing$; $A \setminus A = \varnothing$

7.6. $A \Delta \varnothing = A$; $A \Delta I = \overline{A}$; $A \Delta A = \varnothing$

8. **Закон подвійного доповнення**

$$\overline{\overline{A}} = A.$$

Доведемо закон де Моргана $\overline{(A \bigcup B)} = \overline{A} \bigcap \overline{B}$ на основі таблиці надходження елементів до множин (таблиця 1.2).

Таблиця 1.2.

A	B	$A \cup B$	$\overline{A \bigcup B}$	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A} \bigcap \overline{B}$
1	1	1	**0**	0	0	**0**
1	0	1	**0**	0	1	**0**
0	1	1	**0**	1	0	**0**
0	0	0	**1**	1	1	**1**

Із таблиці 1.2. бачимо, що при різних варіантах надходження елемента до множин *A*, *B* він надходить до правої та лівої частин рівності однаковим (див. четвертий і сьомий стовпчики). Отже, $\overline{(A \bigcup B)} = \overline{A} \bigcap \overline{B}$.

Приклад 1.5.1. Спростити вирази, користуючись властивостями дій над множинами

1) $A \bigcap \left(\overline{A \bigcap B}\right)$;

$$A \bigcap \left(\overline{A \bigcap B}\right) = A \bigcap \left(\overline{A} \bigcup \overline{B}\right) = \left(A \bigcap \overline{A}\right) \bigcup \left(A \bigcap \overline{B}\right) = \varnothing \bigcup (A \setminus B) = A \setminus B;$$

2) $(A \setminus B) \bigcap (A \bigcup B)$.

Оскільки $A \setminus B \subset A \bigcup B$, то $(A \setminus B) \bigcap (A \bigcup B) = A \setminus B$.

Приклад 1.5.2.

Чи випливає з $A \setminus B = C$, що $A = B \cup C$? І навпаки, чи випливає з

$A = B \cup C$, що $A \setminus B = C$?

Розглянемо перше питання задачі. Запишемо рівність $A = B \cup C$ в іншому вигляді: $A = B \cup C = B \cup (A \setminus B)$. Перевіримо отримане співвідношення $A = B \cup (A \setminus B)$. Бачимо (таблиця 1.3), що стовпчики, які відповідають A *і* $B \cup (A \setminus B)$, не збігаються, тобто з умови $A \setminus B = C$ не випливає, що $A = B \cup C$. У той же час можна стверджувати, що $A \subset B \bigcup C$, тому що **всі** числа у стовпчику A **менші** за числа у стовпчику $B \cup C$.

Таблиця 1.3.

A	B	$A \setminus B$	$B \cup (A \setminus B)$
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1

Розглянемо друге питання: нехай $A = B \cup C$, чи правильно, що в цьому випадку $A \setminus B = C$ (або $(B \cup C) \setminus B = C$)? Третій і четвертий стовпчики не збігаються (таблиця 1.4), тому й ця рівність неправильна. Насправді, $(B \bigcup C) \setminus B \subset C$ (**усі** числа в четвертому стовпчику **менші** за числа в другому стовпчику).

Таблиця 1.4.

B	C	$B \cup C$	$(B \cup C) \setminus B$
0	0	0	0
0	1	1	1
1	0	1	0
1	1	1	0

Приклад 1.5.3. Довести включення $\left(B \setminus C\right) \setminus \left(B \setminus A\right) \subset A \setminus C$.

Розглядаючи різні варіанти надходження елемента у множини A, B, C (таблиця 1.5), бачимо, що якщо елемент надходить до $(B\setminus C)\setminus(B\setminus A)$, то він надходить і до $A\setminus C$, тобто $(B\setminus C)\setminus(B\setminus A)\subset A\setminus C$.

Таблиця 1.5.

A	B	C	$B\setminus C$	$B\setminus A$	$(B\setminus C)\setminus(B\setminus A)$	$A\setminus C$
1	1	1	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	0	1	0	0
0	0	1	0	0	0	0
1	1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0	1
0	1	0	1	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0

Приклад 1.5.4. Використовуючи правила 1-13 довести рівності

а) $A\setminus(A\bigcap B)=A\setminus B$; б) $(A\bigcup B)\setminus(B\setminus A)=A$;

в) $A\setminus(C\bigcap B)=(A\setminus B)\bigcup(A\setminus C)$.

Доведення:

а) $A\setminus(A\bigcap B)=A\bigcap\overline{(A\bigcap B)}=A\bigcap(\bar{A}\bigcup\bar{B})=(A\bigcap\bar{A})\bigcup(A\bigcap\bar{B})=$

$=\varnothing\bigcup(A\setminus B)=A\setminus B.$

б) $(A\bigcup B)\setminus(B\setminus A)=(A\bigcup B)\setminus(B\bigcap\bar{A})=(A\bigcup B)\bigcap(\bar{B}\bigcup A)=$

$=((A\bigcup B)\bigcap\bar{B})\bigcup((A\bigcup B)\bigcap A)=(A\bigcap\bar{B})\bigcup A)=A\bigcap(\bar{B}\bigcup A)=A$

в) $A\setminus(C\bigcap B)=A\bigcap(\bar{C}\bigcup\bar{B})=(A\bigcap\bar{C})\bigcup(A\bigcap\bar{B})=(A\setminus C)\bigcup(A\setminus B)$.

Приклад 1.5.5. Довести рівність множин:

$$(A\bigcup B)\setminus C=(A\setminus C)\bigcup(B\setminus C)$$

1) на основі таблиці входження елементів у множини;

2) використовуючи закони 1-13 алгебри множин;

3) за допомогою відповідних діаграм Ейлера-Венна;

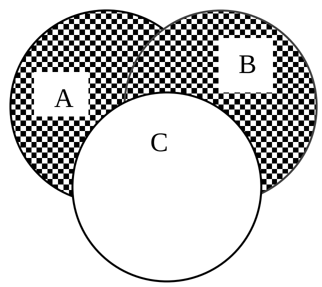
Розв’язання:

1)

A	**B**	**C**	$A\bigcup B$	$(A\bigcup B)\setminus C$	$A\setminus C$	$B\setminus C$	(A\C)$\bigcup$(*B*\C)
1	1	1	1	0	0	0	0
1	0	1	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0
1	1	0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	0	1
0	1	0	1	1	0	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0

2) $(A\bigcup B)\setminus C=(A\bigcup B)\bigcap\overline{C}=(A\bigcap\overline{C})\bigcup(B\bigcap\overline{C}=(A\setminus C)\bigcup(B\setminus C)$.

3)



$(A\bigcup B)\setminus C=(A\setminus C)\bigcup(B\setminus C)$

Приклад 1.5.6. Проілюструвати рівність множин за допомогою діаграм Ейлера-Венна:

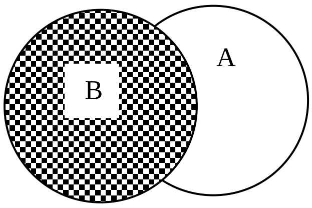
а) $A\setminus(A\bigcap B)=A\setminus B$;

б) $A\setminus(A\setminus B)=A\bigcap B$;

в) $A\bigcup(B\setminus A)=A\bigcap B$.

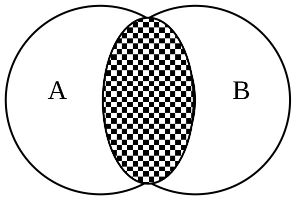
Розв’язання:

а)



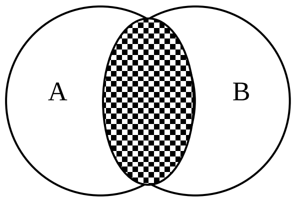
$$A \setminus (A \bigcap B) = A \setminus B$$

б)



$$A \bigcup (B \setminus A) = A \bigcap B$$

в)



$$A \setminus (A \setminus B) = A \bigcap B$$

1.6. Приклади знаходження різних комбінацій множин

1.6.1. Множини точок на площині. Розв’язання систем лінійних нерівностей

Пряма $Ax + By + C = 0$ ділить площину на дві напівплощині. Щоб розв’язати нерівність $Ax + By + C \geq 0$, треба взяти будь-яку точку у будь-якій на півплощині. Якщо для цієї точки нерівність виконується, то вона виконується для усіх точок цієї на півплощини. Якщо не виконується, то розв'язком нерівності є множина точок іншої півплощини.

Приклад 1.6.1. Розв'язати нерівність $x - y + 1 \geq 0$.

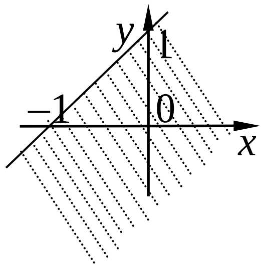


Рис.1.2

Розв'язання. Будуємо графік прямої $x - y + 1 = 0 \Leftrightarrow y = x + 1$. Для точки (0;0) нерівність виконується. Тому розв'язок нерівності заштрихована напівплощина (рис.1.2).

Приклад 1.6.2. Розв'язати систему нерівностей $\begin{cases} x - y + 1 \geq 0, \\ x + y - 3 \leq 0, \\ x + 3y + 1 \geq 0 \end{cases}$.

Розв'язання.

1.На кожній з прямих обираємо по 2 точки та будуємо графіки цих прямих

$$\begin{array}{|l} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{cases} x - y = -1, & (0;1), (-1;0) \\ x + y = 3, & (0;3), (3;0) \\ x + 3y = -1, & (2;-1), (-1;0) \end{cases}$$

2. Розв'язок кожної нерівності позначаємо двома стрілками.

3. Знаходимо перетин (загальну частину) трьох на півплощин (заштрихована на рис.1.3).

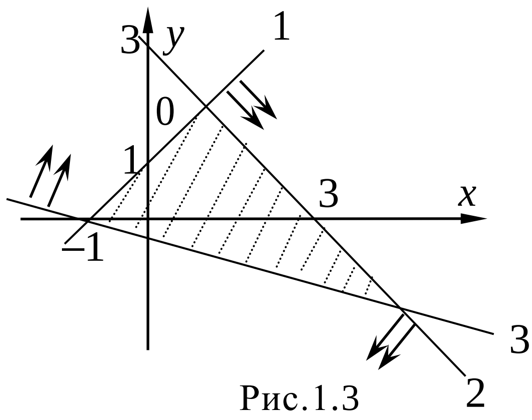


Рис.1.3

1.6.2. Приклади операцій над множинами

Приклад 1.6.3. Знайти перетин множин

$$A=\{2n-1:n=1,2,3,4,5\},\ B=\{p:p-\text{просте число}\}.$$

Множини задаються переліком властивостей елементів множин. Перелічимо елементи множини *A*.

$$A=\{1,3,5,7,9\}.$$

Просте число – це натуральне число, яке має тільки два натуральних дільники (лише 1 і саме це число).

Перетин множин – це множина, яка складається з елементів, що входять в *A* і *B* одночасно, тобто треба з елементів множини *A* вибрати прості числа.

$$A\bigcap B=\{1,3,5,7\}.$$

Приклад 1.6.4.

Знайти доповнення множини *A* до множини *B*, якщо $A=\{x:3<x\le 5\}$, $B=\{x:-1\le x<7\}$.

Зобразимо задані множини на числовій осі (рис. 1.4). Доповнення множини *A* до множини *B* – це множина *C*

$$C=[-1;3]\bigcup(5;7).$$

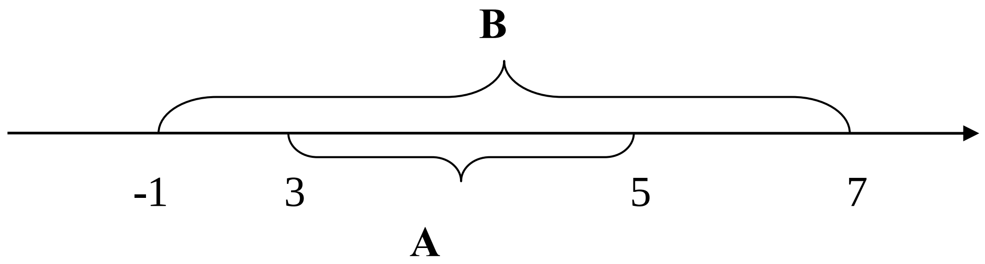


Рис. 1.4

Приклад 1.6.5. Знайти об’єднання множин *A* і *B*, якщо

$$A=\{2n:n=2,3,4,5,6,7\},\ B=\{2^n:n=1,2,3,4\}.$$

Випишемо елементи множин $A=\{4,6,8,10,12,14\}$, $B=\{2,4,8,16\}$. Об'єднанням множин є множина, яка містить усі елементи, що входять або до множини *A*, або до множини *B*, або до множин *A* і *B* одночасно. $A\bigcup B=\{2,4,6,8,10,12,14,16\}$.

Приклад 1.6.6. Знайти різницю множин *A* *B*, якщо $A=\{1,2,3,8\}$, $B=\{2,4,5,7,8\}$.

Різницею множин *A* \ *B* є множина, яка містить усі елементи множини *A*, що не входять у множину *B*. У цьому прикладі це множина $A\setminus B=\{1,3\}$.

Приклад 1.6.7. Знайти множину точок площини, координати яких задовольняють такій системі нерівностей:

$$\begin{cases} x-2y\le 4 \\ x^2+y^2\le 9 \end{cases}.$$

Побудуємо першу множину $x-2y\le 4$ згідно з п.1.6. Це напівплощина, межа цієї напівплощини – пряма, рівняння якої $x-2y=4$. Точки (0;–2), (4; 0) належать цій прямій.

Перевіримо, чи належить точка О (0; 0) напівплощині $x-2y\le 4$, для цього підставимо координати точки О у першу нерівність

$0-2\cdot 0\le 4,$

$0\le 4.$

Нерівності правильні, тому точка О (0 ; 0) належить півплощині $x-2y\le 4$. Відносно прямої $x-2y=4$ обираємо півплощину, яка містить точку О (позначена штриховкою). Друга множина $x^2+y^2\le 9$ – це коло з центром у початку координат і радіусом $R=3$. Перетин цих множин – шукана множина, що зображена на рис. 1.5 (перетин штриховок).

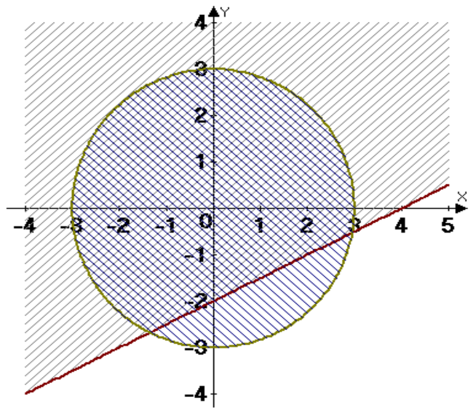


Рис. 1.5

Приклад 1.6.8. Знайти множину точок площини, координати яких задовольняють системі нерівностей:

$$\begin{cases} (x+3)^2 + (y-1)^2 \le 1 \\ |x| \le 3 \end{cases}.$$

Множина $(x+3)^2 + (y-1)^2 \le 1$ – це коло з центром у т. M (–3; 1) та радіусом $R = 1$. Множина $|x| \le 3$, або $-3 \le x \le 3$ – це вертикальна смуга шириною 6. Перетин множин зображений на рис. 1.6.

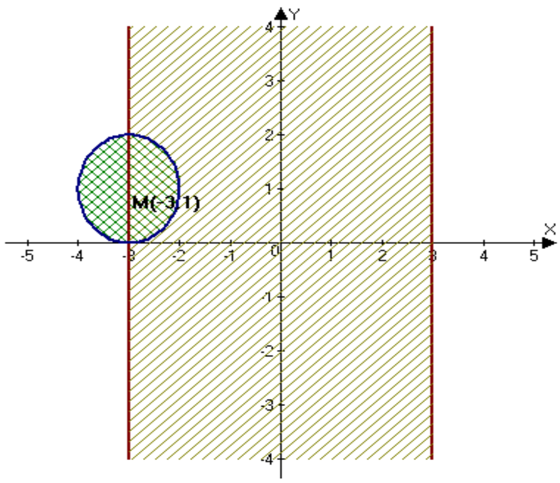


Рис. 1.6.

1.7. Формула включень та виключень

Нехай скінченна множина A подана як об’єднання деяких скінченних множин $A_1, \ldots, A_n$: $A = A_1 \cup \ldots \cup A_n$. Як пов’язані кількості елементів у множині A і в множинах $A_1, \ldots, A_n$? Для випадку $n = 2$ на це питання відповісти легко.

Нагадаємо, що $|A|$ («потужність множини *A*») – це кількість елементів у скінченній множині *A*. Тоді:

1) якщо A_1 і A_2 скінченні множини і $A_1 \cap A_2 = \varnothing$, то

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2|. \quad (1.7.1),$$

2) якщо A_1 і A_2 скінченні множини і $A_1 \cap A_2 \neq \varnothing$, то

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|, \quad (1.7.2)$$

так як спільні елементи множин A_1 і A_2 входять до об’єднання тільки один раз (див. діаграму Венна).

Приклад 1.7.1. Із 220 школярів 163 вміють грати у хокей, 175 – у футбол, 24 не вміють грати у ці ігри. Скільки школярів одночасно вміють грати у хокей та у футбол?

Уведемо позначення: Ш – множина всіх школярів, |Ш| = 220, Ф – множина школярів, що вміють грати у футбол, |Ф| = 175, Х – множина школярів, що вміють грати у хокей, |Х| = 163, Ф ∩ Х – множина школярів, що вміють грати і у футбол, і у хокей, Ф ∪ Х – множина школярів, що вміють грати хоча б в одну з ігор – або у футбол, або у хокей. За умовою, 24 школярі не вміють грати в ці ігри, тому |Ф ∪ Х| = |Ш| – 24=196. За формулою (1.7.2), |Ф ∪ Х| = |Ф| + |Х| – |Ф ∩ Х|, звідки

|Ф ∩ Х| = |Ф| + |Х| – |Ф ∪ Х| = 175 + 163 – 196 = 142.

Відповідь: 142 школярі грають і у футбол, і у хокей.

Насправді формула (1.7.2) є окремим випадком формули включень і виключень, яка відповідає на питання, що постає на початку розділу, для будь-якого натурального *n*.

Теорема 1.7.1. Якщо $A_1, A_2, ..., A_n$ – деякі скінченні множини, то

$$\begin{aligned}&|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = \left[|A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n|\right] - \\ &-\left[|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + \ldots + |A_{n-1} \cap A_n|\right] + \\ &\left[|A_1 \cap A_2 \cap A_3| + \ldots + |A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n|\right] - \ldots + \\ &+(-1)^{n-1}|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|.\end{aligned}$$

Пояснимо формулювання цієї теореми. Права частина формули в теоремі є алгебраїчною сумою n доданків (кожен у квадратних дужках), що мають переміжно знаки «+» і «–». Перший доданок – сума елементів, що надходять до множин $A_1, A_2, ..., A_n$, другий – сума елементів, що надходять до перетинів пар множин $A_i \cap A_j$ ($i < j$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, n$), третій – сума елементів, що надходять до потрійних перетинів $A_i \cap A_j \cap A_k$ ($i < j < k$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, n$, $k = 1, \ldots, n$) тощо. Останній доданок зі знаком $(-1)^{n-1}$, – число елементів у множині $A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n$. Таке переміжне включення та виключення доданків з метою врахування кожного елемента лише один раз і слугувало причиною для назви цієї формули.

Наслідок. Якщо множини $A_1, A_2, ..., A_n$ попарно не перетинаються, то

$$|A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + ... + |A_n|.$$

Приклад 1.7.2. У студентській групі 25 людей. Під час літніх канікул 9 з них від’їжджали у турпоїздки за кордон, 12 – мандрували Україною, 15 – відпочивали на морі в Криму, 6 – мандрували за кордоном і Україною, 7 – були і за кордоном, і в Криму, 8 – мандрували Україною і були у Криму, 3 – брали участь у всіх трьох поїздках. Скільки студентів нікуди не виїжджали?

Нехай: K – множина студентів, що виїжджали за кордон; Y – множина студентів, що мандрували Україною; M – множина студентів, що відпочивали на морі у Криму.

Тоді множина студентів, що їздили хоча б кудись, $K \cup Y \cup M$. Так як $9 + 12 + 15 = 36 > 25$, то множину K, Y, M перетинаються (це бачимо і безпосередньо з умови задачі, бо деякі студенти були в різних поїздках) і

$$|K \cup Y \cup M| == |K| + |Y| + |M| - |K \cap Y| - |K \cap M| - |Y \cap M| + |K \cap Y \cap M|.$$

Маємо $|K| = 9$, $|У| = 12$, $|M| = 15$, $|K \cap У| = 6$, $|K \cap M| = 7$, $|У \cap M| = 8$,

$|K \cap У \cap M| = 3$. Тоді, $|K \cup У \cup M| = 9+12+15-6-7-8+3=39-21= 18$, а нікуди не виїжджали $25-18 = 7$ студентів.

Індивідуальні завдання

Завдання 1

В-т 1

а) перелічити елементи множини M = {множина кольорів спектра};

б)знайти множину точок на площині, координати яких задовольняють системі нерівностей $\begin{cases} |x| \ge 3 \\ x^2 + y^2 \ge 3 \end{cases}$.

в) знайти об'єднання (суму) множин А і В, якщо

$A = \{\, p : \textit{просте число, що менше за } 15\}$, $B = \{2n-1 : n = 1,2,3,4\}$.

В-т 2

а) перелічити елементи множини

$M = \{\textit{множина додатніх простих чисел, які менші за } 40\}$;

б)знайти множину точок площини, координати яких задовольняють системі нерівностей $\begin{cases} y < |\, x\,| \\ |\, x\,| > 2 \end{cases}$;

в) знайти перетин (добуток) множин $A = \{2n : n = 1,2,...,10\}$, $B = \{3n : n = 1,2,...,10\}$.

В-т 3

а) перелічити елементи множини

$M = \{\textit{множина цілих додатніх степенів } 3\textit{, які менші за } 250\}$;

б) знайти множину точок площини, координати яких задовольняють системі нерівностей $\begin{cases} x^2 + (y-3)^2 \le 9 \\ |\, y\,| < 2 \end{cases}$**;**

в) знайти об'єднання (суму) множин $A = \{1,2,4,6,7\}$ і $B = \{2^n : n = 1,2,3,4\}$.

В-т 4

а) перелічити елементи множини

$M = \{\textit{множина додатніх чисел, кратних } 5\textit{, які менші за } 47\}$;

б) знайти множину точок площини, координати яких задовольняють

системі нерівностей $\begin{cases} y - x < 3 \\ y - 3x \geq 5 \end{cases}$;

в) знайти різницю множин $A \setminus B$, де $A = \{-1,3,6,7,9,4,10,22\}$, $B = \{3,4,9\}$.

В-т 5

а) перелічити елементи множини

$$M = \{\text{множина різних однокольорових шахматних фігур}\};$$

б) знайти множину точок площини, координати яких задовольняють

системі нерівностей $\begin{cases} x + y > 0 \\ -4x + y > 4 \end{cases}$;

в) знайти різницю $A \setminus B$, де $A = \{2n - 1 : n = 1,2,...,10\}$ і $B = \{3n + 2 : n = 1,2,3,...,10\}$.

В-т 6

а) перелічити елементи множини $M = \{x : (x^2 - 1)(x^2 - 3x - 4) = 0\}$;

б) знайти множину точок площини, координати яких задовольняють

системі нерівностей $\begin{cases} x^2 + (y+1)^2 < 81 \\ x > 5 \end{cases}$;

в) знайти добуток множин $A = \{6n - 1 : n = 1,2,...,7\}$ і $B = \{4n - 1\}$.

В-т 7

а) перелічити елементи множини $M = \{x : \cos x - 2 = 0\}$;

б) знайти множину точок на площині, координати яких задовольняють

системі нерівностей $\begin{cases} x - y > 1 \\ x^2 + y^2 > 4 \end{cases}$;

в) знайти об’єднання множин $A = \{1,5,8\}$ і $B = \{1,2,8,9,11\}$.

В-т 8

а) перелічити елементи множини $M = \{x : -1 \leq |x| < 1,\ x \in Z\}$;

б) знайти множину точок на площині, координати яких задовольняють системі нерівностей $\begin{cases} |x| > 2 \\ y - 3x < 0 \end{cases}$;

в) знайти об'єднання (суму) множин $A = \{1,3,8\}$ і $B = \{1,2,8,9,11\}$.

В-т 9

а) перелічити елементи множини $M = \{x : \cos^2 x = 4\}$;

б) знайти множину точок на площині, координати яких задовольняють систем нерівностей $\begin{cases} x - y > 2 \\ |x| \geq 1 \end{cases}$;

в) знайти доповнення множини *A* до множини *B*, якщо $A = \{1,5,8\}$, $B = \{1,2,5,8,9,11\}$.

В-т 10

а) перелічити елементи множини $M = \{x : \cos^2 x - \sin 2x = 0, -\pi < x < \pi\}$;

б) знайти множину точок на площині, координати яких задовольняють системі нерівностей $\begin{cases} x^2 + y^2 < 3 \\ y > -1 \end{cases}$;

в) знайти добуток множин $A = \{x : \sin x = 1\}$, $B = \{x : \sin x \leq 1\}$.

В-т 11

а) перелічити елементи множини $M = \{x : x^2\sqrt{x} - x = 0\}$;

б) знайти множину точок на площині, координати яких задовольняють систему нерівностей $\begin{cases} (x+3)^2 + y^2 < 1 \\ x > -3 \end{cases}$;

в) знайти доповнення множини *A* до *B*, якщо $A = \{x : 1 < x < 2\}$, $B = \{x : 0 < x < 4\}$.

В-т 12

а) перелічити елементи множини $M = \{x : 2 < x < 9, x - \textit{просте число}\}$;

б) знайти множину точок на площині, координати яких задовольняють системі нерівностей $\begin{cases}(x-1)^2+y^2>4\\ x\neq 1\end{cases}$;

в) знайти суму множин $A=\{(x,y):|x|>2\}$, $B=\{(x,y):|y|<2\}$.

В-т 13

а) перелічити елементи множини $M=\{\textit{множина простих чисел, які менші за } 57\}$;

б) знайти множину точок площини, координати яких задовольняють системі нерівностей $\begin{cases}x\geq 3\\ x+y\leq 9\end{cases}$;

в) знайти перетин множин $A=\{p:\textit{прості числа, менші за } 15\}$,

$B=\{2n-1:n=1,2,3,4\}$.

В-т 14

а) перелічити елементи множини $M=\{x:\sqrt{x}-4x=0\}$;

б) знайти множину точок площини, координати яких задовольняють системі нерівностей $\begin{cases}y<x\\ |x|\leq 2\end{cases}$;

в) знайти різницю множин $A\setminus B$, де $A=\{2n+2:n=1,2,...10\}$,

$B=\{2^n:n=1,2,...5\}$.

В-т 15

а) перелічити елементи множини $M=\{x:x-\sqrt{x}-2=0\}$;

б) знайти множину точок площини, координати яких задовольняють систему нерівностей $\begin{cases}x^2+(y-3)^2\leq 25\\ |y|\geq 2\end{cases}$;

в) знайти перетин множин $A=\{1,2,3,5,6,7,8\}$, $B=\{2^n:n=1,2,3,4\}$.

В-т 16

а) перелічити елементи множини $M=\{x:x^4-8x^2-9=0\}$;

б) знайти множину точок на площині, координати яких задовольняють

системy нерівностей $\begin{cases} y+x\le 3 \\ y-3x\ge 5 \end{cases}$;

в)знайти різницю $A\setminus B$, де $A=\{-1,3,6,7,9,4,10,22\}$ $B=\{3,4,9,22\}$.

В-т 17

а) перелічити елементи множини $M=\{x:(x^2-4)(x^2+3x-4)=0\}$;

б) знайти множину точок на площині, координати яких задовольняють

системі нерівностей $\begin{cases} x+y>1 \\ -4x+y>4 \end{cases}$;

в) знайти об’єднання (суму) множин $A=\{3n+1:n=1,2,...,8\}$ і $B=\{2n+1:n=1,2,3,...,10\}$.

В-т 18

а) перелічити елементи множини $M=\{x:2\cos x-1=0\}$;

б) знайти множину точок на площині, координати яких задовольняють

системі нерівностей $\begin{cases} x^2+(y+1)^2<81 \\ x>5 \end{cases}$;

в) знайти доповнення множини *A* до *B*, якщо $A=\{2,3,5,6\}$, $B=\{n+1:n=1,2,...,7\}$.

В-т 19

а) перелічити елементи множини $M=\{x:-1\le|x|<1,\ x-\text{ціле число}\}$;

б) знайти множину точок на площині, координати яких задовольняють

системі нерівностей $\begin{cases} x-y\le 1 \\ x^2+y^2\le 4 \end{cases}$;

в) знайти об’єднання (суму) множин $A=\{1,5,6,8\}$ і $B=\{1,2,8,9,11,12\}$.

В-т 20

а) перелічити елементи множини $M=\{x:x^3-x^5=0\}$;

б) знайти множину точок на площині, координати яких задовольняють системі нерівностей $\begin{cases} x^2 + y^2 \le 1 \\ x + y \le 4 \end{cases}$;

в) знайти перетин (добуток) множин $A = \{1, 2, 5, 6, 8, 12\}$, $B = \{-1, 3, 8, 9, 10, 12, 15\}$.

Завдання 2

1. Виконати завдання на основі таблиці входження елементів у множини; 2. Зобразити відповідні діаграми Ейлера-Венна;

3. Використовуючи правила 1-13 довести рівності множин:

1) $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus (B \cap C)$;

2) $A \cap B \cap C = A \setminus (A \setminus (B \cap C))$;

3) $(A \setminus B) \bigcup (A \setminus C) = A \setminus (B \cap C)$;

4) $(A \setminus B) \cap (A \setminus C) = A \setminus (B \bigcup C)$;

5) $(A \setminus B) \bigcup (B \setminus C) \bigcup (C \setminus A) \bigcup (A \cap B \cap C) = A \bigcup B \bigcup C$;

6) $-(A \setminus B) = -A \bigcup (A \cap B)$;

7) $-A \bigcup (-(B \bigcup C)) = (-(A \cap B)) \cap (-(A \cap C))$;

8) $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$;

9) $(A \cap B) \bigcup (A \cap (-B)) = A$;

10) $(A \bigcup B) \cap (A \bigcup (-B)) = A$;

11) $(A \bigcup B) \setminus C = (A \setminus C) \bigcup (B \setminus C)$;

12) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \bigcup (A \cap C)$;

13) $A \setminus (B \bigcup C) = (A \setminus B) \setminus C$;

14) $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$;

15) $A \bigcup B = (A \Delta B) \bigcup (A \cap B)$;

16) $A \bigcup B = A \Delta B \Delta (A \cap B)$;

17) $A \setminus B = A \Delta (A \cap B)$.

Довести включення:

18) $A \cap B \subset A \bigcup B$;

19) (A ∩ C) ⋃ (B ∩ D) ⊂ (A ⋃ B) ∩ (C ⋃ D);

20) A \ C ⊂ (A \ B) ⋃ (B \C);

21) (A ⋃ C) \ B ⊂ (A \ B) ⋃ C.

Які включення правильні для множин?

22) A \ (B ⋃ C) та (A \ B) \ C;

23) A ⋃ (B \ C) та (A ⋃ B) \ C;

24) (A \ B) ⋃ C) та A ⋃ (C \ B).

Завдання 3

Розв’язати систему нерівностей.

В-т 1.

$$\begin{cases} 5x+3y\ge 15 \\ 3x-2y\le -1 \\ -3x+2y\le 12, x\le 4 \end{cases}.$$

В-т 10 .

$$\begin{cases} 8x+9y\le 12 \\ x+14y\le 7 \\ x\ge -2, y\ge 0 \end{cases}$$

В-т 2.

$$\begin{cases} x-2y\le 2 \\ -x+2y\ge -8 \\ 5x+3y\le 20, x\ge 0 \end{cases}.$$

В-т 11 .

$$\begin{cases} -x+2y\le 4 \\ 4x-y\le 8 \\ 4x+5y\ge -20 \end{cases}$$

В-т 3.

$$\begin{cases} 3y-2x\ge 3 \\ 2x-3y\ge -15 \\ 6x+5y\le 30, x\ge -1 \end{cases}$$

В-т 11.

$$\begin{cases} 7x+5y\le 35 \\ 6x+7y\le 42 \\ y\le 5, y\ge 0, x\ge 0 \end{cases}$$

В-т 4.

В-т 13.

$$\begin{cases} 5x+6y \le 30 \\ 3x+7y \le 21 \\ x \ge 1, y \ge 0 \end{cases}$$

В-т 5.

$$\begin{cases} 6x+5y \le 30 \\ 4x+7y \le 28 \\ x \ge 0, y \ge -1 \end{cases}$$

В-т 6.

$$\begin{cases} 5x+4y \le 20 \\ 2x+5y \le 10 \\ x \ge 1, y \ge 0 \end{cases}$$

В-т 7.

$$\begin{cases} 6x+5y \le 30 \\ 4x+7y \le 28 \\ x \ge 0, y \ge -1 \end{cases}$$

В-т 8.

$$\begin{cases} 4x+5y \le 20 \\ 3x+7y \le 21 \\ y \le 2.5, x \ge 0, y \ge 0 \end{cases}$$

В-т 9.

$$\begin{cases} 5x+3y \ge 15 \\ 3x-2y \le -1 \\ -3x+2y \le 12, x \le 4 \end{cases}$$

В-т 19.

$$\begin{cases} 3x-5y \le -10 \\ 5y-3x \le 30 \\ 5x+7y \le 35, x \ge -2 \end{cases}$$

В-т 14.

$$\begin{cases} 4x-3y \le -3 \\ 3y-4x \le 15 \\ 4x+5y \le 30, 4x+5y \ge 0 \end{cases}$$

В-т 15.

$$\begin{cases} 2x-y \le 1 \\ x-y \ge -3 \\ x \ge 0, y \ge 0 \end{cases}$$

В-т 16.

$$\begin{cases} 3x+2y \le 12 \\ 3x+y \ge 3 \\ x \ge 0, y \ge 0 \end{cases}$$

В-т 17.

$$\begin{cases} x+y \ge 0 \\ 2x+y \le 3 \\ x-2y \ge 0 \end{cases}$$

В-т 18.

$$\begin{cases} x-2y \le 2 \\ -x+2y \ge -8 \\ 5x+3y \le 20, x \ge 0 \end{cases}$$

В-т 25.

$$\begin{cases} x - y \ge -2 \\ x - y \le 2 \\ y \le 3, x \ge 0, y \ge 0 \end{cases}$$

В-т 20.

$$\begin{cases} x + y \ge -2 \\ x - 2y \ge -1 \\ 3x - y \le 8, x \ge 0 \end{cases}$$

В-т 21.

$$\begin{cases} y - x \le -1 \\ x + 4y \ge -2 \\ x + 4y \le 4, x \ge 3 \end{cases}$$

В-т 22.

$$\begin{cases} x - y \ge -2 \\ x - y \le 0 \\ x + y \ge 0, x + 2y \le 4 \end{cases}$$

В-т 23.

$$\begin{cases} x - 2y \ge -2 \\ x - 2y \le 1 \\ x + y \ge -2, x \le 2 \end{cases}$$

В-т 24.

$$\begin{cases} x - 3y \ge -1 \\ 3x + y \le 6 \\ x + y \ge -1, x \ge 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2x + 3y \le 6 \\ -2x + 3y \ge -6 \\ 2x + 3y \ge -6, x \le 1 \end{cases}$$

В-т 26.

$$\begin{cases} -x + y \le 1 \\ x - y \le 3 \\ y \le 2, x \ge 0, y \ge 0 \end{cases}$$

В-т 27.

$$\begin{cases} 3x + 5y \ge 15 \\ 5x + 6y \le 30 \\ y \le 5, x \ge 0, y \ge 0 \end{cases}$$

В-т 28.

$$\begin{cases} 3y - 2x \le 3 \\ 2x - 3y \ge -15 \\ 6x + 5y \le 30, x \ge -1 \end{cases}$$

В-т 29.

$$\begin{cases} 4y - 3x \ge -4 \\ 3x - 4y \ge -24 \\ 5x + 6y \le 30, x \ge -1 \end{cases}$$

В-т 30.

$$\begin{cases} -2x + 3y \le 6 \\ -2x + 3y \ge -66 \\ 2x + 3y \ge -6,\ x \le 2 \end{cases}$$

Завдання 4

1. За підсумками іспитів із 37 студентів відмінну оцінку з математики мали 15 студентів, з фізики – 16, з хімії – 19, з математики та фізики – 7, з математики та хімії – 9, з фізики та хімії – 6, з усіх трьох дисциплін – 4. Скільки студентів отримали хоча б по одній відмінній оцінці?

2. Протягом 30 днів вересня було 12 дощових, 8 вітряних, 4 холодних, 5 дощових та вітряних, 3 дощових та холодних, 3 вітряних та холодних днів, а один день був дощовий, вітряний та холодний одночасно. Скільки днів у вересні була гарна погода?

3. У класі 35 учнів. Із них 20 відвідують математичний гурток, 11 – фізичний, 10 учнів не відвідують жодного з цих гуртків. Скільки учнів відвідують лише математичний гурток?

4. Староста курсу навів такий звіт про фізкультурну роботу. «Всього 45 студентів. Футбольна секція – 25 осіб, баскетбольна – 30, шахова – 28 осіб. Одночасно у футбольній та баскетбольній секції займаються 16 людей, у футбольній та шаховій – 18, у баскетбольній та шаховій – 17. У трьох секціях одразу займаються 15 осіб». Поясніть, чому звіт не був прийнятий?

5. В одному з відділів науково-дослідного інституту працюють кілька людей, кожний з яких знає хоча б одну іноземну мову, причому 6 осіб знають англійську мову, 6 – німецьку, 7 – французьку, 4 людини знають англійську та німецьку, 3 – німецьку та французьку, 2 – французьку та англійську, 1 людина знає всі три мови. Скільки співробітників знають лише одну мову?

6. Скільки існує цілих чисел від 1 до 1000, що не діляться ні на 5, ні на 7?

Вказівка. Для підрахунку кількості чисел від 1 до A, що діляться на a, можна використати функцію $y = E\ (x)$ – ціла частина x (найбільше ціле число, що не перевершує x). Наприклад, кількість чисел від 1 до 100, що діляться на 9, дорівнює E (100 / 9) = E (11,11...) = 11.

7. Скільки існує цілих чисел від 1 до 100, що не діляться ні на 2, ні на 3, ні на 5, ні на 7? (див. **вказівку** до задачі 6).

8. Скільки натуральних чисел від 1 до 1000 не діляться ні на 2, ні на 3, ні на 5? (див. **вказівку** до задачі 6).

9. Вибрана деяка множина натуральних чисел. Відомо, що серед них є: 100 чисел, що кратні 2; 115 чисел, що кратні 3; 120 чисел, що кратні 5; 45 чисел, що кратні 6; 38 чисел, що кратні 10; 50 чисел, що кратні 15; 20 чисел, що кратні 30. Скільки елементів у заданій множині?

10. Із 100 школярів 40 грають у футбол, а 50 – у волейбол. Що можна сказати про кількість школярів, які грають в обидві гри? Про кількість школярів, що грають хоча б в одну з цих ігор?

11. Із 80 школярів грають у футбол – 40, а у волейбол – 50. Що можна сказати про кількість школярів, які грають в обидві гри? Про кількість школярів, що грають хоча б в одну з цих ігор?

12. У колонії знаходиться 500 в’язнів, кожен з яких засуджений хоча б за однією зі статей №A, №B, №C Карного кодексу. Відомо, що до 127 в’язнів застосовувалась стаття A, до 210 – стаття B, до 269 – стаття C, до 80 – одночасно і стаття A, і стаття B, до 20 – статті A і C, до 45 – статті B і C. Чи є в колонії в’язні, що засуджені за усіма трьома статтями та, якщо є, скільки їх?

13. На бал у Венецію приїхала відома модниця княгиня A. Дізнавшись про це, фрейліни купили собі такі ж підвіски, серги та обручки. Зі 115 фрейлін, присутніх на балу, 31 була в таких же підвісках, 45 – в сергах, 50 – в обручках. 36 фрейлін одягли підвіски та серги, 23 – підвіски та обручки, 27 – обручки та серги. Наймоднішими виявились 15 фрейлін, що одягли і підвіски, і серги, і обручки, як у княгині. Скільки фрейлін не знало про приїзд княгині A?

14. 17 арабів знайшли чарівну лампу з джином та попросили його виконати їх бажання. 9 арабів бажали багато золота, 4 – великий та красивий палац, 6 – жіночий гарем. Одночасно золото і палац бажали троє, гарем та золото – десять, палац та гарем – троє арабів. Скільки арабів бажали все одночасно, якщо відомо, що джин для кожного виконав бажання?

15. Із 21 дня, проведеного у санаторії, 12– я приймав лікувальні процедури, 5 днів їздив на екскурсії. Скільки у мене було вільних днів, якщо 3 дні я поєднував лікувальні процедури та екскурсії?

16. У селі 500 літніх жінок дивляться бразильський серіал. Із них 155 турбуються за Марію Антоніо, 108 цікавляться життям Педро, 134 – хвилює доля Хосе Ігнасіо, 48 жінок турбуються за відносини Марії Антоніо та Хосе Ігнасіо, 35 – хвилюються за Марію Антоніо та Педро, 17 – підозрюють родинні зв'язки Хосе Ігнасіо і Педро, 23 жінки вірять у щастя всіх головних героїв. Скільки жінок у селі, що дивляться серіал, взагалі за жодного з головних героїв не турбуються і не вірять в їх щастя?

17. У племені Майя 37 індіанців. 12 з них на голові носять червоне пір'я, 14 – синє, 17 – біле, 9 – червоне і синє, 5 – червоне і біле, 3 – синє і біле. Чи є в племені індіанці, що носять пір'я усіх трьох кольорів, і якщо є, то скільки?

18. За результатами опитування студентської групи, з 32 осіб:
12 регулярно читають журнал «Світ ПК», 10 – читають журнал «Відкриті системи», 8 – надають перевагу журналу «Знання-Сила», 3 – читають і «Світ ПК», і «Відкриті системи», 4 особи читають «Світ ПК» і «Знання-Сила», 5 – «Відкриті системи» та «Знання-Сила», а 1 людина читає всі три журнали. Скільки людей читають лише «Світ ПК»?

19. У класі 35 учнів. Із них 20 відвідують математичний гурток, 11 – фізичний, 10 учнів не відвідують жодного з цих гуртків. Скільки учнів відвідують і математичний, і фізичний гуртки?

20. За результатами опитування студентської групи, з 32 осіб 18 регулярно читають журнал «Світ ПК», 19 – читають журнал «Відкриті системи», 15 – надають перевагу журналу «Знання-Сила», 8 – читають і «Світ ПК» і «Відкриті системи», 9 – людей читають «Світ ПК», і «Знання-Сила», 7 – «Відкриті системи» та «Знання-Сила», а 3 людини читають усі три журнали. Скільки людей не читає жодного з вказаних журналів?

21. Зі 100 студентів англійську мову знають 28 студентів, німецьку – 30, французьку – 42, англійську та німецьку – 8, англійську та французьку – 10, німецьку та французьку – 5, усі три мови знають 3 студенти. Скільки студентів не знають жодної з цих мов?

22. У класі 35 учнів. Із них 20 відвідують математичний гурток, 11 – фізичний, 10 учнів не відвідують жодного з цих гуртків. Скільки учнів відвідують лише фізичний гурток?

23. На заміську прогулянку поїхали 92 людини. Бутерброди з ковбасою взяли 47 людей. Із них із сиром – 38, із шинкою – 31, із сиром та ковбасою – 28, із ковбасою та шинкою – 31, із сиром та шинкою – 26, усі три види бутербродів узяли 25 людей. Декілька осіб замість бутербродів захопили з собою пиріжки. Скільки людей узяли з собою пиріжки?

24. В одному з відділів науково-дослідного інституту працюють кілька осіб, кожна з яких знає хоча б одну іноземну мову, причому 6 осіб знають англійську мову, 6 – німецьку, 7 – французьку, 4 – знають англійську та німецьку, 3 – німецьку та французьку, 2 – французьку та англійську, 1 особа знає всі три мови. Скільки співробітників у відділі?

25. У науково-дослідному інституті працює 67 осіб. Із них 47 володіють англійською мовою, 35 – німецькою, 23 – обома мовами. Скільки співробітників не володіють ні англійською, ні німецькою мовами?

Завдання 5

Використовуючи правила 1-13 та формулу $A \setminus B = A \bigcap \bar{B}$ довести рівності:

1. $(A \bigcap B) \setminus C = (A \setminus C) \bigcap (B \setminus C)$.

2. $(A \bigcap B) \setminus C = A \bigcap (B \setminus C)$.

3. $A \setminus (B \bigcap C) \setminus C = (A \setminus B) \bigcap (A \setminus C)$.

4. $(A \setminus B) \bigcap C = (A \bigcap C) \setminus (B \bigcap C)$.

5. $A \setminus B \setminus C = (A \bigcup B) \setminus (B \bigcup C)$.

6. $A \setminus B \setminus C = (A \setminus B) \bigcup (A \setminus C)$.

7. $(A \setminus C) \bigcap (B \setminus C) = (A \bigcap B) \setminus C$.

8. $(A \setminus C) \setminus (B \setminus C) = A \setminus B \setminus C$.

9. $(A \setminus B \setminus (A \setminus C) = (A \bigcap C) \setminus B$.

10. $(A \bigcup B) \setminus (B \bigcup C = (A \setminus B) \bigcap (A \setminus C)$.

11. $(A \bigcap B) \bigcup (A \setminus C) = (A \bigcap B) \bigcup (A \setminus B \setminus C)$.

12. $(A \setminus B) \bigcup (C \setminus (B \setminus A)) = (C \setminus B) \bigcup (A \setminus (B \setminus C))$.

13. $A \bigcup (C \setminus B) = ((A \bigcup C) \setminus B) \bigcup (A \bigcap B)$.

14. $A \bigcup (B \setminus C) = ((A \bigcup B) \setminus C) \bigcup (A \bigcap C)$.

15. $(A \bigcap B) \bigcup (A \setminus C) = (A \bigcap B) \bigcup (A \setminus B \setminus C)$.

16. $(A \bigcup B) \bigcap (\bar{B} \bigcup C) = (A \bigcap \bar{B}) \bigcup (B \bigcap C)$.

17. $(A \setminus C) \bigcap (B \setminus C0 = (A \bigcap B) \setminus (A \bigcap C)$.

18. $(A \bigcup B) \setminus C = (A \setminus C) \bigcup (A \setminus C)$.

Контрольні запитання та завдання:

1. Сформулюйте поняття множини.
2. Сформулюйте способи визначення множини.
3. Вкажіть, які є операції над множинами.
4. Поясніть формулу включень та виключень.
5. Сформулюйте основні закони операцій над множинами.
6. Наведіть приклад множини та її підмножини.
7. Поняття універсальної множини. Наведіть приклад.
8. Сформулюйте та доведіть закони де Моргана.
9. Операції з універсальною, довільною та порожньою множинами. Зобразити на діаграмах Ейлера-Венна.
10. Дайте означення еквівалентності множин.
11. Які існують операції над множинами?
12. Пояснити відмінності між операціями об’єднання та перетин множин.
13. Пояснити такі операції над множинами як різниця, симетрична різниця, доповнення. Основні властивості цих операцій
14. Які з теоретико-множинних операцій є бінарними?
15. Яка з теоретико-множинних операцій є унарною?
16. Чому дорівнює різниця множин, якщо множини не перетинаються?
17. Яка множина є підмножиною будь-якої множини ?
18. Чому дорівнює перетин множини з власною підмножиною ?
19. Дайте означення потужності множини.
20. Дайте означення зліченної та незліченної множини. Наведіть приклади.

Розділ 2. МАТЕМАТИЧНА ЛОГІКА

2.1.Висловлювання

Висловлювання – це розповідне речення, про яке в даний момент можна сказати, істинне воно чи хибне, але не те й інше одночасно.

Висловлювання позначаються малими літерами латинського алфавіту, наприклад, p, q, r.

Приклад 2.1.1 «Учора була чудова погода», «Діти люблять грати в ігри», «Сьогодні ввечері я піду на дискотеку», «$7+3=11$» – все це висловлювання.

На відміну від цього «Який чудовий вечір!», «Котра година?»– не висловлювання, оскільки не є розповідними реченнями; а про твердження «$2x+3<7(x-1)$» неможливо сказати істинно воно чи ні, доки замість x не будуть підставлені певні числа і не буде вказано на істинність чи хибність цієї нерівності.

Для позначення «істина» будемо застосовувати символ 1, а для позначення «хибність» – символ 0. Ці символи називаються **значеннями істинності.** Істинність висловлювання – його єдина характеристика.

Означення 2.1. Якщо висловлювання істинно в усіх логічно можливих випадках, то воно називається **тотожно** істинним **висловлюванням** і позначається **1**, якщо воно хибне в усіх логічно можливих випадках, то воно *тотожно хибне* і позначається символом **O**.

Із кількох висловлювань за допомогою зв’язок (операторів) можна створювати нові висловлювання, які називають **складними висловлюваннями** або **формулами.** Складові формули позначаються однією літерою і називаються простими висловлюваннями. Істинність складних висловлювань залежить від істинності його простих складових.

2.2. Зв'язки

1. Кон'юнкція.

Кон'юнкцією (логічним множенням) висловлювань p і q називається висловлювання $p \wedge q$, яке істинно тоді і тільки тоді, коли істинні обидва ці висловлювання.

Приклад 2.2.1. Висловлювання p – «Сьогодні понеділок», q – «Я піду на роботу». Тоді висловлювання $p \wedge q$ – «Сьогодні понеділок і я піду на роботу».

Висловлювання p та q – прості. Висловлювання $p \wedge q$ – складне. Будь-яке складне висловлювання можна задати у вигляді **таблиці істинності**.

Таблиця істинності для кон'юнкції:

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

2. Диз'юнкція.

Диз'юнкцією (логічним додаванням) висловлювань p і q називається висловлювання $p \vee q$, яке істинно тоді і тільки тоді, коли істинно або висловлювання p, або висловлювання q, або обидва.

Таблиця істинності для диз'юнкції:

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Приклад 2.2.2. Задано висловлювання p – «4 – дільник числа 11», q – «6 – просте число», тоді диз'юнкція $p \vee q$ – хибне висловлювання, тому що обидва висловлювання, що входять у диз'юнкцію, хибні.

3.Інверсія.

Інверсія (логічне заперечення*)* – це висловлювання $\overline{p}$ $(\neg p)$, яке істинне, коли p – хибне, та хибне, коли p – істинне.

Приклад 2.2.3. Висловлювання p – «Деякі студенти не склали екзамен з вищої математики», тоді інверсія $\overline{p}$ – «Всі студенти склали екзамен з вищої математики».

Таблиця істинності для інверсії:

p	$\overline{p}$
0	1
1	0

4. Імплікація.

Імплікація (наслідок) – це висловлювання $p \Rightarrow q$ (читається «якщо *p*, то q»), яке хибне тоді і тільки тоді, коли *p* – істинно, а q – хибне.

Таблиця істинності для імплікації:

p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Останні два рядки в цій таблиці називаються **правилом хибної посилки** (*p* – посилка, q – висновок).

Приклад 2.2.4. Нехай задані такі висловлювання: p – «Велика вологість», q – «Висока температура», r – «Ми почуваємо себе добре». Тоді висловлювання «Якщо вологість велика та температура висока, то ми почуваємо себе погано» можна записати у вигляді формули логіки висловлювань $(p \wedge q) \Rightarrow \bar{r}$.

Приклад 2.2.5. Задача. Професор Луї тільки що повернувся з подорожі на острів, мешканці якого завжди або говорять правду, або завжди брешуть. Він розповів, що чув двох остров'ян, які стверджували:

А: «В завжди бреше».

В: «А завжди говорить правду».

Що ви можете сказати про професора Луї?

Розв'язання. Можливі чотири варіанти:

1. А говорить правду, В говорить правду;
2. А говорить правду, В бреше;
3. А бреше, В говорить правду;
4. А бреше, В бреше.

Тоді в першому випадку: якщо А говорить правду, то В завжди бреше, прийшли до протиріччя, оскільки В говорить правду.

У другому випадку: якщо А говорить правду, то В завжди бреше. Тоді є хибним, що А завжди говорить правду, А бреше, прийшли до протиріччя.

У третьому випадку: якщо А бреше, то В говорить правду. Тоді А завжди говорить правду, прийшли до протиріччя.

У четвертому випадку: якщо А бреше, то В говорить правду. Протиріччя висловлюванню «В бреше».

Висновок: Професор Луї – брехун!

5. Еквівалентність.

Еквівалентність (подвійна імплікація) висловлювань $p \Leftrightarrow q$ (читається «p тоді і тільки тоді, коли q», або «для p необхідно й достатньо q»). $p \Leftrightarrow q$ істинно тоді і тільки тоді, коли p і q одночасно істинні або одночасно хибні.

Приклад 2.2.6. Нехай задані два висловлювання: p – «Вода сьогодні вранці замерзла», q – «Сьогодні вранці температура була нижче нуля». Тоді мовою логіки висловлювань можна записати $p \Leftrightarrow q$.

Приклад 2.2.7. Висловлювання p – «x – дійсне число, більше або рівне 1», а q – «x – дійсне число, таке, що $x^2 \geq 1$». Правильна імплікація тільки в один бік $p \Rightarrow q$ («для q достатньо p» або «для p необхідно q»), але $q \not\Rightarrow p$ («для p не достатньо q»), отже, $p \not\Leftrightarrow q$.

Приклад 2.2.8. Довести, що подвійна імплікація – це кон'юнкція двох простих імплікацій, тобто $p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$.

Таблиця 2.2.1

p	q	$p \Leftrightarrow q$	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$
1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0
1	0	0	0	1	0
0	0	1	1	1	1

Оскільки третій та останній стовпці співпадають, формула доведена.

Приклад 2.2.9. Довести формулу $p \Rightarrow q \equiv \overline{p} \vee q$.

Таблиця 2.2.2

p	q	$p \Rightarrow q$	$\overline{p} \vee q$
1	1	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
0	0	1	1

Бачимо, що третій та четвертий стовпці співпадають, тому формула $p \Rightarrow q \equiv \overline{p} \vee q$ правильна.

2.3. Закони логіки висловлювань

Нехай є прості висловлювання $p_1,...,p_n$. За допомогою зв'язків із цих висловлювань робляться складні висловлювання $F(p_1,...,p_n)$ та $G(p_1,...,p_n)$.

Два складні висловлювання F та G називаються **еквівалентними чи рівносильними**($F \equiv G$ *або* $F \sim G$) якщо на всіх наборах значень пропозиційних змінних вони набувають однакових значень, зокрема, мають однакові таблиці істинності.

Наведемо основні рівносильності (закони) алгебри висловлювань, які будуть широко застосовуватись далі. Усі вони легко перевіряються за допомогою таблиць істинності:

1.Закони комутативності: а) $p \wedge q \equiv q \wedge p$, б) $p \vee q \equiv q \vee p$.

2. Закони асоціативності: а)$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$,

б) $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$.

3. Закони дистрибутивності: а) $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$,

б) $p \vee (q \wedge p) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$.

4. Закони де Моргана: а) $\overline{p \vee q} \equiv \overline{p} \wedge \overline{q}$, б) $\overline{p \wedge q} \equiv \overline{p} \vee \overline{q}$.

5. Закон подвійного заперечення: $\overline{\overline{p}} \equiv p$;

6. Закони ідемпотентності: а) $p \vee p \equiv p$; б) $p \wedge p \equiv p$.

7. Закони сталих: а) $p \wedge 1 \equiv p$, б) $p \wedge 0 \equiv 0$, в) $p \vee 1 \equiv 1$,

г) $p \vee 0 \equiv p$, д) $\overline{1} \equiv 0$, е) $\overline{0} \equiv 1$.

8.Закони поглинання: а) $p \vee (p \wedge q) \equiv p$, б) $p \wedge (p \vee q) \equiv p$.

9. Закон виключеного третього: $p \vee \overline{p} \equiv 1$.

Ці закони логіки висловлювань стосуються трьох логічних операцій $\vee, \wedge, \neg$. Усі інші логічні операції виражаються через них.

11. $p \Rightarrow q \equiv \overline{p} \vee q$.

12. $p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p) \equiv (\bar{p} \vee q)(p \vee \bar{q}) \equiv pq \vee \bar{p}\,\bar{q}$.

13. $p \oplus q \equiv \overline{p \Leftrightarrow q} \equiv \bar{p} \Leftrightarrow q \equiv (p \vee q)(\bar{p} \vee \bar{q}) \equiv p\bar{q} \vee \bar{p}\,q$.

Додамо ще два важливі закони:

14. $p \Rightarrow q \equiv \bar{q} \Rightarrow \bar{p}$ – закон контрапозиції.

15. $pq \vee p\bar{q} \equiv p$ – закон склеювання.

Щоб довести рівносильність двох формул алгебри висловлювань, можна не складати для них таблиці істинності, а з'єднати ці формули ланцюжком еквівалентних перетворень, використовуючи наведені вище закони.

Приклад 2.3.1. Довести рівносильності:

a) $pq \Leftrightarrow (p \Rightarrow r) \equiv p(q \Leftrightarrow r)$; b) $(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow (p \vee r) \equiv p \vee q \vee r$;

c) $(p \vee q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow r) \equiv (p \vee q)(p \Rightarrow r)$.

Доведення: a) $pq \Leftrightarrow (p \Rightarrow r) \overset{11}{\equiv} pq \Leftrightarrow (\bar{p} \vee r) \overset{12}{\equiv} pq(\bar{p} \vee r) \vee$

$\vee\, \overline{pq}\,\overline{(\bar{p} \vee r)} \overset{4}{\equiv} pqr(\bar{p} \vee \bar{q})\,p\bar{r} \equiv pqr \vee p\bar{q}\,\bar{r} \equiv p(qr \vee \bar{q}\,\bar{r}) \equiv p(q \Leftrightarrow r)$;

b) $(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow p \vee q \overset{13,11}{\equiv} \bar{p}q \vee p\bar{q} \vee p \vee r \overset{6a,15}{\equiv} \bar{p}q \vee p\bar{q} \vee p\bar{q} \vee pq \vee p \vee$

$\vee r \overset{15,6a}{\equiv} p\bar{q} \vee p \vee q \vee r \overset{8}{\equiv} p \vee q \vee r$;

c) $(p \vee q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow r) \overset{12}{\equiv} (p \vee q)(p \Rightarrow r) \vee \overline{(p \vee q)}\,\overline{(p \Rightarrow r)} \overset{4,11}{\equiv}$

$\equiv (p \vee q)(p \Rightarrow r) \vee \bar{p}\,\bar{q}p\bar{r} \equiv (p \vee q)(p \Rightarrow r)$.

2.4. Логічне виведення в логіці висловлювань

1. Основні означення:

Складові складних висловлювань для стислості будемо іноді називати **атомами.** Для знаходження значення істинності складного висловлювання необхідно надати значення істинності всім атомам, які містить відповідна формула. Набір значень істинності всіх атомів формули називають її **інтерпретацією**. Формула, яка містить n атомів має 2^n інтерпретацій та називається ***n*–містною**.

Формулу f називають **виконаною,** якщо існує принаймні одна інтерпретація, в якій f набуває значення T. У такому разі кажуть. що f **виконується** в цій інтерпретації.

Формулу f логіки висловлювань називають **загальнозначущою** чи **тавтологією,** якщо вона виконується в усіх інтерпретаціях.

Формулу, хибну в усіх інтерпретаціях називають **заперечуваною, невиконаною,** чи **суперечністю.**

Означення. Говорять, що формула g – логічний наслідок формул $f_1, f_2, ..., f_n$, або що g логічно випливає з $f_1, f_2, ..., f_n$, якщо кожен раз, коли формула $f_1 \wedge f_2 \wedge ... \wedge f_n$ набуває значення 1, формула g також приймає значення 1. Формули $f_1, f_2, ..., f_n$ називають **гіпотезами** (аксіомами, постулатами чи засновками) формули g. Той факт, що формула g логічно випливає з $f_1, f_2, ..., f_n$ позначають $f_1, f_2, ..., f_n \,|\!-g$.

Теорема1. Формула g є логічний наслідок формул $f_1, f_2, ..., f_n$ тоді й тільки тоді коли формула $(f_1 \wedge f_2 \wedge ... \wedge f_n) \rightarrow g$ загальнозначуща.

Приклад 2.4.1. Розглянемо формули $f_1 = (p \rightarrow q)$, $f_2 = \overline{q}$, $g = \overline{p}$. Доведемо, що формула g є логічним наслідком формул f_1 і f_2.

Таблиця 2.4.1

p	q	$p \rightarrow q$	$\overline{q}$	$(p \rightarrow q) \wedge \overline{q}$	$\overline{p}$
1	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	0	1
0	0	1	1	1	1

Із табл.2.4.1. видно, що є лише одна інтерпретація в якій

$(p \to q) \wedge \overline{q}$ виконується, а саме $p = 0,\ q = 0$. У цій інтерпретації формула $\overline{p}$ також виконується. Отже, за означенням формула $\overline{p}$ – логічний наслідок формул $p \to q$ та $\overline{q}$.

Приклад 2.4.2. Скористаємось теоремою 1. Доведемо, що формула $(f_1 \wedge f_2) \to g$ загальнозначуща. Перевіримо, що $((p \to q) \wedge \overline{q}) \to \overline{p} \equiv 1$.

$$((p \to q) \wedge \overline{q}) \to \overline{p} \equiv ((\overline{p} \vee q) \wedge \overline{q}) \to \overline{p} \equiv$$
$$(\overline{p} \wedge \overline{q}) \vee (q \wedge \overline{q})) \to \overline{p} \equiv$$
$$\equiv (\overline{p} \wedge \overline{q}) \to \overline{p} \equiv (p \vee q) \vee \overline{p} \equiv 1 \vee q \equiv 1.$$

У логіці висловлювань застосовуються правила виведення, які обґрунтовують кроки доведення логічних теорем. Це доведення полягає в перевірці того, що висновок є логічним наслідком множини гіпотез. Деякі важливі правила виведення та відповідні їм тавтології наведено в таблиці.

Правила виведення:

	Правило виведення	Тавтологія	Назва правила виведення
	$p \mid- p \vee q$	$p \to (p \vee q)$	Уведення диз'юнкції
	$p \wedge q \mid- q$	$(p \wedge q) \to p$	Виключення кон'юнкції
	$p, q \mid- p \wedge q$	$((p) \wedge (q)) \mid- (p \wedge q)$	Уведення кон'юнкції
	$p, p \to q \mid- q$	$(p \wedge (p \to q)) \to q$	Modus ponens
	$\overline{q}, p \to q \mid- \overline{p}$	$(\overline{q} \wedge (p \to q)) \to \overline{p}$	Modus Tollens
	$p \to q, q \to r \mid- p \to r;$	$((p \to q) \wedge (q \to r)) \to$	Гіпотетичний силогізм
	$p \vee q, \overline{p} \mid- q$	$((p \vee q) \wedge \overline{p}) \to q$	Диз'юнктивний силогізм
	$p \to q \mid- \overline{q} \to \overline{p}$	$(p \to q) \mid- (\overline{q} \to \overline{p})$	Правило контрапозиції
	$p \to q, r \to q \mid-$ $\mid- (p \vee r) \to q$	$((p \to q) \wedge (r \to q)) \to$ $\to ((p \vee r) \to q)$	

Застосування тавтологій

Приклад 2.4.3. З'ясувати, яке правило виведення використано в такому міркуванні: «Якщо демократія є найкращою системою урядування, то кожен повинен голосувати. Демократія є найкращою системою урядування. Отже, кожен повинен голосувати»?

Нехай p – висловлювання «Демократія є найкращою системою урядування», а q– висловлювання «Кожен повинен голосувати». Тоді це твердження можна записати у вигляді правила modus ponens: $p, p \to q \mid - q$.

Modus tollens (лат. спосіб що заперечує) – формальна назва доведення від **супротивного.**

Приклад 2.4.4. Теорема Ферма. Якщо функція $f(x)$ має екстремум в точці x_0, то $f'(x) = 0$.

Нехай p– висловлювання « $f(x)$ має екстремум в точці x_0 »,

q– висловлювання « $f'(x) = 0$».

Наслідок з теореми Ферма. Якщо $f'(x) \neq 0$ в D_f, то $f(x)$ не має екстремумів в D_f. Це правило modus tollens $\overline{q}, p \to q \mid - \overline{p}$.

Приклад 2.4.5. Для наведених нижче, логічних виведень визначити коректність висновку та зробити потрібні пояснення:

А. Дано гіпотези:

1. «Іван тяжко працює (Т)».

2. «Якщо Іван тяжко працює, то він пасивний хлопець (П)».

3. «Якщо Іван – пасивний хлопець, то він не знайде кращої роботи (Р)». Використати правила виведення для обґрунтування такого висновку з цих гіпотез: «Іван не знайде кращої роботи».

Гіпотези:1. T, 2. $T \to П$, **3.** $П \to P$, а схема виведення:

$T, T \to П, П \to P \mid - P$.

Послідовність кроків отримання висновку:

1. T - гіпотеза.

2. $T \to П$ - гіпотеза.

3. $П$ - modus ponens до 1 та 2.

4. $П \to P$ - гіпотеза.

5. P - modus ponens до 4 та 5. Висновок доведено.

Б. Якщо цей курс добрий (*d*), то він корисний (*k*). Або екзаменатор поблажливий (*p*), або цей курс некорисний ($\neg k$). Екзаменатор не поблажливий. Отже, цей курс поганий ($\neg d$).

Гіпотези: $d \to k,\ p \vee \overline{k},\ \overline{p},$ висновок $\overline{d}$. Позначимо функцію $f = (d \to k) \wedge (p \vee \overline{k}) \wedge \overline{p}$. Для визначення коректності висновку скористаємось теоремою 1 та перевіримо, чи є формула

$f_1 = (d \to k) \wedge (p \vee \overline{k}) \wedge \overline{p} \to \overline{d}$ тавтологією.

Складемо таблицю істинності.

Таблиця 2.4.2

d	k	p	$d \to k$	$p \vee \overline{k}$	$\overline{p}$	f	$\overline{d}$
0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	0	0	1
0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	1	1	1	0	0	1
1	0	0	0	1	1	0	0
1	0	1	0	1	0	0	0
1	1	0	1	0	1	0	0
1	1	1	1	1	0	0	0

$f \to \overline{d} \equiv 1$. Висновок правильний.

Логічне виведення шляхом еквівалентних перетворень

Приклад 2.4.6. Доведемо правило modus ponens складанням таблиці істинності:

p	q	$p \to q$	$p(p \to q)$	$p(p \to q) \to q$
1	1	1	1	1
1	0	0	0	1
0	1	1	0	1
0	0	1	0	1

Дійсно, як це випливає з теореми 1, формула $p(p \to q) \to q$ є тавтологія.

Доведемо це шляхом еквівалентних перетворень. Перевіримо, чи $p(p \to q) \to q \equiv 1$.

$$p(p \to q) \equiv p(\overline{p} \vee q) \equiv p\overline{p} \vee pq \equiv 0 \vee pq \equiv pq,$$

$$p(p \to q) \to q \equiv \overline{pq} \to q \equiv \overline{p} \vee \overline{q} \vee q \equiv \overline{p} \vee 1 \equiv 1.$$

Приклад 2.4.7. Визначити, чи є схеми виведення правильними:

а) $p \to q, \overline{p} \to q | - q$; перевіримо, чи $(p \to q)(\overline{p} \to q) \to q \equiv 1$

$(p \to q)(\overline{p} \to q) \equiv (\overline{p} \vee q)(p \vee q) \equiv \overline{p}p \vee qp \vee \overline{p}q \vee qq \equiv 0 \vee q(p \vee \overline{p}) \vee q \equiv q \vee q \equiv q$;
$(p \to q)(\overline{p} \to q) \to q \equiv .q \to q \equiv \overline{q} \vee q \equiv 1$;

б) $p \to q, p \to \overline{q} | - \overline{p}$; перевіримо, чи $(p \to q)(p \to \overline{q}) \to \overline{p} \equiv 1$;

$(p \to q)(p \to \overline{q}) \equiv (\overline{p} \vee q)(\overline{p} \vee \overline{q}) \equiv \overline{p}\overline{p} \vee q\overline{p} \vee \overline{p}\overline{q} \vee q\overline{q} \equiv \overline{p}\overline{p} \vee \overline{p}(q \vee \overline{q}) \vee 0 \equiv \overline{p} \vee \overline{p} \equiv \overline{p}$;
$(p \to q)(p \to \overline{q}) \to \overline{p} \equiv \overline{p} \to \overline{p} \equiv p \vee \overline{p} \equiv 1$.

Логічне виведення шляхом відшукання контрприкладу

Нехай досліднику потрібно приймати або відкидати твердження, що деяке висловлювання g є логічний наслідок висловлювань $f_1, f_2, \ldots, f_n$, або ні. Тобто, якщо усі f_i приймають значення 1, а значення $g = 0$, то міркування не є логічним. Самий зручний спосіб розв'язання цього питання є наступним: приймаємо, що $g = 0$, а усі $f_i = 1$, та зробимо аналіз, чи отримано імплікацію $0 \to 0$, тобто схема правильна, чи $1 \to 0$, тобто, хибна.

Викладений метод доведення того, що деяка формула є логічний наслідок інших, знецінює метод, розглянутий вище, оскільки цей метод дуже швидко дає результат. Однак перший має свої позитивні якості. Наприклад, він потребує знання тавтологій, які часто зустрічаються в математичних доведеннях.

Приклад 2.4.8. Розглянемо наступне міркування.

Якщо я піду завтра на перше заняття, то повинен буду встати рано, а якщо я піду ввечері на танці, то ляжу спати пізно. Якщо я ляжу спати пізно, а встану рано, то я буду змушений спати лише п’ять годин. Я не в змозі обійтися п’ятьма годинами сну. Отже, я повинен або пропустити завтра перше заняття, або не ходити на танці.

Щоб дослідити, чи справедливе це міркування, символізуємо його, замінюючи прості висловлювання буквами. Нехай C означає «Я йду (піду) завтра на перше заняття»; G – «Я повинен встати рано»; D – «Я йду (піду) ввечері на танці»; S – «Я ляжу спати пізно», а E – «Я можу обійтися п’ятьма годинами сну». Тоді гіпотези можна записати символічно в такому вигляді:

$(C \to G) \wedge (D \to S),\ S \wedge G \to E,\ \bar{E}$, висновок $\bar{C} \vee \bar{D}$, а схема виведення:

$$((C \to G) \wedge (D \to S)) \wedge (S \wedge G \to E) \wedge \bar{E} | - \bar{C} \vee \bar{D}.$$

Згідно з описаним вище методам аналізу, приймемо, що $\bar{C} \vee \bar{D}$ має значення F, а кожна з посилок має значення T. Тоді і C і D повинні мати значення T. Далі, як випливає з першої посилки, G і S мають значення T. Це і друга посилка тягнуть за собою, що E має значення T. Але це суперечить допущенню, що третя посилка має значення T.

Таким чином, доведено, що $0 \to 0$ та $\bar{C} \vee \bar{D}$ є логічний наслідок наявних посилок.

Приклад 2.4.9. Припустимо, що маємо таке твердження:

$A \to B, C \to D,\ A \vee C \mid -B \wedge D$.

Приймемо, що $B \wedge D$ має значення F, а кожна з гіпотез T. Перше припущення задовольняється, якщо приписати B значення T, а D - значення F. У такому випадку C має значення F і A – значення T. При таких істиннісних значеннях кожна з посилок отримує значення T, а $B \wedge D$ приймає значення F. Отже,маємо $1 \to 0$ і міркування не логічне.

2.5. Логіка предикатів

1. Означення декартового добутку множин

Нехай $R = \{x : -\infty < x < \infty\}$ множина точок прямої. Множина точок площини і простору, відповідно , є $R^2 = \{(x; y) : x \in R, y \in R\}$, $R^3 = \{(x; y; z) : x \in R, y \in R, z \in R\}$.

Декартів добуток множин $M_1, M_2, ..., M_n$ *(не обов'язково різних), це* $M = M_1 \times M_2 \times ... \times M_n = \{(x_1; x_2; ...; x_n) : x_i \in M_i, i = 1, ..., n\}$.

Означення. Нехай $M = \{M_1, M_2, ..., M_n\}$ скінчений набір множин. n - **місним предикатом** називається функція

$$P : M_1 \times M_2 \times ... \times M_n \to E_2 = \{0;1\}.$$

Змінні $x_i \in M_i, i = 1, ..., n$ називаються **предметними змінними**. Множина M_i – **предметною областю** для змінної x_i, а множина $M = M_1 \times M_2 \times ... \times M_n$ – **областю визначення** предиката $P(x_1; x_2; ...; x_n)$. Сталі 0 та 1 називаються 0-місними **предикатами.** Предикати позначають великими латинськими буквами $P, Q, R, ...$ а предметні змінні – малими латинськими буквами *x, y, z…*

Якщо зафіксувати значення усіх предметних змінних, то предикат перетворюється на висловлювання (істинне або хибне). Предикати називають ще **функціями-висловлюваннями**, **пропозиційними формулами,** або **неозначеними висловлюваннями**.

Приклад 2.5.1. Нехай

1). $P(x;y;z)$ предикат $x+y+z=2$, тоді $P(1;\ 1;\ 1) = F,\ P(1;\ 1;\ 0) = T;$

2). $x<2$ - предикат $P(x), P(1)=T,\ P(-1)=T,\ P(3)=F$;

3). $x<y$ предикат $P(x,y)$, $x<2$ відповідає предикат $P(x,2)$,

x – предметна змінна, y – вільна змінна;

4). Нехай $P(x)$ предикат «Місто x – столиця України»

$M(P(x))=$ Київ, $P(\text{Київ})=T$, $P(\text{Харків})=F$.

Латинське *praedicatum* – присудок. Традиційна логіка виділяє у висловлюванні **суб'єкт** (предикатна змінна) – те про що говориться у висловлюванні, **предикат** – те, що говориться.

Квантори

1. Із предикатів можна будувати не тільки висловлювання, які стосуються окремих предметів (аргументів), а й висловлювання, які виражають властивості цілої множини предметів (висловлювання про **загальність**), і висловлювання про **існування** предметів з даної множини, з певними властивостями.

Вираз «для кожного х», називається квантором загальності і позначається символом $\forall x$.

Вираз «існує х» називається квантором існування і позначається символом $\exists x$.

Приписування поредеду предикатної формули квантора загальності або існування виражає операцію **зв'язування квантором**: змінна, яка «зв'язується» цим квантором (яка фігурує і в предикаті, і в кванторі), називається **зв'язаною** змінною.

Приклад 2.5.2. Нехай $P(x)$ – предикат: «*x* – просте число», $(\forall x)P(x)$ – хибне висловлювання «будь-яке число *x* – просте», а $(\exists x)P(x)$ – істинне висловлювання «існує число *x* таке, що воно – просте».

Приклад 2.5.3. Запишемо висловлювання: «Всі студенти повинні вчитися» мовою логіки.

Розглянемо множину A – студенти, та властивість $B(x)$ – людина повинна вчитися, тоді $\left(\forall x \in A\right)\left(B(x)\right)$ – будь-яка людина, що є студентом, повинна вчитися.

Приклад 2.5.4. Висловлювання «Через будь-які три різні точки простору можна провести єдину площину» має вигляд:

$$(\forall\, A \in R^3,\ \forall\, B \in R^3,\ \forall\, C \in R^3) : (A \neq B \neq C)(\exists!\, P(A, B, C)).$$

Приклад 2.5.5. Запишемо висловлювання «Для будь-якого натурального x існує дійсний y, такий, що їх частка дорівнює цілому числу» мовою логіки.

$\forall\, x \in N\ \ \exists\ \ y \in R : \dfrac{x}{y} \in Z$ – це висловлення істинне. (Будь-яке натуральне число принаймні при діленні само на себе дає цілу частку).

Квантор спільності можна розглядати як узагальнення кон’юнкції, а квантор існування – як узагальнення диз’юнкції.

Дійсно, якщо область визначення A предиката $P(x)$ скінченна, наприклад, $A(a_1, a_2, ..., a_n)$, то висловлювання $(\forall x)P(x)$ еквівалентне кон’юнкції $P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge ... \wedge P(a_n)$, а висловлювання $(\exists x)P(x)$ – диз’юнкції $P(a_1) \vee P(a_2) \vee ... \vee P(a_n)$).

Якщо ж предикат $P(x)$ визначено на нескінченній множині, то квантори грають роль «нескінченних» кон’юнкцій і диз’юнкцій, подібно до того, як в математичному аналізі ряди та інтеграли є узагальненнями звичайних, кінцевих сум.

Зв'язок між кванторами

Розглянемо правила переходу від одних формул до рівносильних їм.

1. Перестановка однойменних кванторів:

V1 а) $(\exists x)(\exists y)\Phi(x,y) \equiv (\exists y)(\exists x)\Phi(x,y)$;

V2 б) $(\forall x)(\forall y)\Phi(x,y) \equiv (\forall y)(\forall x)\Phi(x,y)$.

2. Перенесення квантора через заперечення:

V3 а) $\overline{\exists x(\Phi(x))} \equiv \forall x(\overline{\Phi(x)})$;

V4 б) $\overline{\forall x(\Phi(x))} \equiv \exists x(\overline{\Phi(x)})$.

Приклад 2.5.6. Висловлювання «Не всі студенти вчаться» рівносильне висловлюванню «Існує студент, який не вчиться». Мовою логіки, використовуючи позначення, введені в прикладі 2.5.3., це висловлювання можна записати так:

$$\overline{(\forall\, x \in A)(B(x))} = (\exists\, x \in A)\left(\overline{B(x)}\right).$$

Приклад 2.5.7. Побудувати заперечення для кожного з таких висловлювань:

а) Істинне висловлювання: $\forall\, x \in (2;+\infty):\ x^2 > 4$ (читається так: для будь-якого x, більшого за двійку, його квадрат більше чотирьох).

Заперечення: $\exists x \in (2;+\infty):\ x^2 \le 4$ – хибне висловлювання (читається так: існує x, більший за двійку, квадрат якого менше чотирьох).

б) Хибне висловлювання: «Деякі люди безсмертні».

Заперечення: «Всі люди смертні» – істинне висловлювання.

3. Винесення квантора за дужки:

V5 а) $(\exists x)(\Phi(x) \wedge B) \equiv (\exists x)\Phi(x) \wedge B$;

V6 б) $(\forall x)(\Phi(x) \wedge B) \equiv (\forall x)\Phi(x) \wedge B$;

V7 в) $(\exists x)(\Phi(x) \vee B) \equiv (\exists x)\Phi(x) \vee B$;

г) $(\forall x)(\Phi(x) \vee B) \equiv (\forall x)\Phi(x) \vee B$.

4. **Операція зв'язування квантором**, або, як її називають квантифікація, переводить одномісний, предикат у висловлювання. Щоб перетворити в висловлювання за допомогою квантифікації багатомісний предикат, потрібно поставити перед ним стільки кванторів, скільки в нього входить різних змінних, зв'язавши квантором, кожну предметну змінну. Нехай ми маємо двомісний предикат $R(x,y)$. За допомогою кванторів можна з нього сконструювати такі висловлювання:

(1) $(\forall x)(\forall y)R(x,y)$ Для будь-якого *x* та будь-якого y має місце $R(x,y)$;

(2) $(\forall y)(\forall x)R(x,y)$ Для будь-якого y та будь-якого *x* має місце $R(x,y)$;

(3) $(\forall x)(\exists y)R(x,y)$ Для будь-якого *x* існує такий y що має місце $R(x,y)$;

(4) $(\exists y)(\forall x)R(x,y)$ Існує такий y, що для будь-якого *x* має місце $R(x,y)$;

(5) $(\exists x)(\forall y)R(x,y)$ Існує такий *x*, що для будь-якого y має місце $R(x,y)$;

(6) $(\forall y)(\exists x)R(x,y)$ Для будь-якого y існує такий *x*, що має місце $R(x,y)$;

(7) $(\exists x)(\exists y)R(x,y)$ Існує *x* та існує y такі, що має місце $R(x,y)$;

(8) $(\exists y)(\exists x)R(x,y)$ Існує y та існує *x* такі, що має місце $R(x,y)$.

Якщо двомісний предикат пов'язується одним квантором, наприклад $(\forall x)R(x,y)$, то отримана формула визначає не висловлювання, а логічну функцію від іншої, не пов'язаної квантором **(вільної),** змінної (одномісний предикат).

Нехай, наприклад, x, у – змінні для дійсних чисел, а «<» – знак двомісного предиката (відношення) «менше».

Тоді: $(\forall x)(\forall y)(x < y)$ та $(\forall y)(\forall x)(x < y)$ – хибні висловлювання:

$(\forall x)(\exists y)(x < y)$ – істинне висловлювання;

$(\exists y)(\forall x)(x < y)$ – хибне висловлювання;

$(\exists x)(\forall y)(x < y)$ – хибне висловлювання;

$(\forall y)(\exists x)(x < y)$ – істинне висловлювання;

$(\exists x)(\exists y)(x < y)$ та $(\exists y)(\exists x)(x < y)$ – істинні висловлювання;

$(\forall x)(x < y)$ – логічна функція від у; $(\exists y)(x < y)$ – логічна функція від x.

Запис математичних виразів на мові логіки предикатів

А. Вираз «Будь-яке натуральне число більше нуля» можна сформулювати у вигляді імплікації з квантором загальності:

«Будь-яке число, якщо воно натуральне, то воно більше нуля» і записати таким чином:

$(\forall x)[(x \in N) \Rightarrow (x > 0)]$, або у вигляді $\underset{x \in N}{(\forall x)}(x > 0)$»,

де вираз $\underset{x \in N}{(\forall x)}$ називається **обмеженим квантором.**

Б. Вираз $\lim a_n = l$ – «Границя послідовності a_n дорівнює числу l», за визначенням, означає: «Для будь-якого додатного числа ε існує таке натуральне число n_ε, що для будь-якого натурального n, якщо $n > n_\varepsilon$, то $|a_n - l| < \varepsilon$».

Запишемо це визначення на мові логіки предикатів із застосуванням обмежених кванторів:

$$\lim a_n = l \Leftrightarrow \underset{\varepsilon > 0}{(\forall \varepsilon)} \underset{\in N}{(\exists n_\varepsilon)} \underset{\in N}{(\forall n)} [(n > n_\varepsilon) \Rightarrow (|a_n - l| < \varepsilon).$$

В. Запишемо на мові логіки предикатів визначення неперервності функції в точці.

Нехай область означення D_f функції f – відрізок, що містить точку x_0. У цьому випадку визначення неперервності функції f в точці x_0 може бути сформульовано таким чином: «Функція неперервна в точці x_0, тоді і тільки тоді, якщо для будь-якого додатного числа ε існує додатне число δ таке, що для будь-якого x з області означення D_f функції f, якщо $|x - x_0| < \delta$, то $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$». [$f$ неперервна в точці x_0] $\Leftrightarrow \Leftrightarrow \underset{>0}{(\forall \varepsilon)} \underset{>0}{(\exists \delta)} \underset{\in D_f}{(\forall x)} [(|x - x_0| < \delta) \Rightarrow (|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$.

Г. Розглянемо геометричну аксіому: «Для будь-яких двох точок існує пряма, інцідентна їм».

Уведемо такі предикати:

$T(x)$ – «x є точка», $P(x)$ – «x є пряма» $I(x, y)$ – « x інцидентна y».

За допомогою цих предикатів наведена аксіома може бути записана наступним чином:

$$(\forall x)(\forall y)[T(x) \wedge T(y) \Rightarrow (\exists z)(P(z) \wedge I(z, x) \wedge I(z, y))].$$

Означення. Інцидентність – геометричний термін, який позначає відношення приналежності між основними об’єктами геометрії: точками, прямими, площинами. Наприклад, речення: точка лежить на прямій, пряма проходить через точку замінюють одним реченням: пряма і точка інцидентні.

Цей термін буде застосований в теорії графів.

2.6. Правила виведення в численні предикатів

Розглянемо деякі важливі правила виведення для формул із кванторами.

Універсальна конкретизація – це правило виведення того, що $P(c)$ істинне для довільного елемента *c* з предметної області за умови, що формула $\forall xP(x)$ істинна. Наприклад, універсальну конкретизацію можна використати тоді, коли з твердження «Всі люди смертні» потрібно дійти висновку «Сократ – смертний». Тут Сократ – елемент предметної області, яка складається з усіх людей.

Універсальне узагальнення — це правило виведення, згідно з яким $\forall xP(x)$ істинне, якщо істинне $P(c)$ для довільного *c* з предметної області. Це правило використовують тоді, коли на підставі істинності $P(c)$ для кожного елемента *c* з предметної області твердять, що $\forall xP(x)$ істинне. Вибраний елемент *c* має бути довільним і не конкретизованим. Універсальне узагальнення неявно застосовують у багатьох математичних доведеннях і рідко згадують явно.

Екзистенційна конкретизація – це правило, яке дає змогу дійти висновку про те, що на підставі істинності $\exists xP(x)$ можна твердити, що в предметній області є елемент *c*, для якого $P(c)$ істинне. Зазвичай про елемент *c* відомо тільки те, що він існує. Із цього випливає, що можна позначити його та продовжувати міркування.

Екзистенційне узагальнення – це правило виведення, використовуване для того, щоб на підставі істинності $P(c)$ на якомусь елементі *c* з предметної області дійти висновку, що $\exists xP(x)$ істинне.

Правила виведення в численні предикатів зазначено в табл.2.6.1.

У правилах 1 і 2 елемент c предметної області довільний, а в правилах 3 та 4 в предметній області має бути принаймні один такий елемент.

Таблиця 2.6.1.

Правило			Назва
1	$\forall x P(x)$	I-	Універсальна конкретизація
2.	$P(c)$	I-	Універсальне узагальнення
3.	$\exists x P(x)$	I-	Екзистенційна
4.	$P(c)$	I-	Екзистенційне узагальнення

Приклад 2.6.1. Доведемо, що гіпотези «Кожний, хто вивчає комп'ютерні науки, слухає курс дискретної математики» та «Марія вивчає комп'ютерні науки» дають змогу сформулювати висновок «Марія слухає курс дискретної математики».

Нехай $D(x)$: «x вивчає комп'ютерні науки», C(x): «x слухає курс дискретної математики». Тоді гіпотези – це формули $\forall x(D(x) \to C(x))$ і D(Марія), а висновок – C(Марія). Доведення висновку для введеної множини гіпотез виконаємо в такій послідовності.

1. $\forall x(D(x) \to C(x))$— гіпотеза.

2. D(Марія) $\to$C(Марія) – універсальна конкретизація до 1.

3. D(Марія) – гіпотеза.

4. C(Марія) – modus ponens до 2 та 3.

Приклад 2.6.2. Доведемо, що з гіпотез «У групі є студент, який не читав підручника», «Всі студенти групи склали іспит» можна сформулювати висновок «Дехто з тих, хто склали іспит, не читав підручника».

Нехай $C(x)$: «x вчиться в групі», $B(x)$: «x читав підручник» і $P(x)$: «x склав іспит». Гіпотези – це $\exists x(C(x) \wedge \overline{B}(x))$ і $\forall x(C(x) \to P(x))$, а висновок – $\exists x(P(x) \wedge \overline{B}(x))$.

Доведення це така послідовність кроків.

1. $\exists x(C(x) \wedge \overline{B}(x))$ – гіпотеза.

2. $C(a) \wedge \overline{B}(a)$ екзистенційна конкретизація до 1.

3. $C(a)$ – виключення кон'юнкції до 2.

4. $\forall x(C(x) \to P(x))$ – гіпотеза.

5. $C(a) \to P(a)$ – універсальна конкретизація до 4.

6. $P(a)$ modus ponens до 3 та 5.

7. $\bar{B}(a)$ – виключення кон'юнкції до 2.

8. $P(a) \wedge \bar{B}(a)$ – уведення кон'юнкції по 6 і 7

9. $\exists x(P(x) \wedge \bar{B}(x))$ – екзистенційне узагальнення до 8.

2.7. Методи доведення теорем

Багато математичних об'єктів можна зробити більш наглядними, якщо користуватись символами і законами логіки. Наприклад, за допомогою логіки були формалізовані і розвинені методи теорії доведень.

Пряме доведення. Правильність розглянутого твердження перевіряється безпосередньо, з використанням визначень або вже доведених тверджень.

Доведення методом «від протилежного». Розглядається твердження, протилежне тому, що доводиться, та виявляється його неправильність або шляхом міркувань, або побудовою контрприкладу.

Доведення методом виключення. Істинність доводиться шляхом послідовного доведення хибності всіх складових висловлювання (диз'юнкції), крім одного.

Метод математичної індукції

Метод математичної індукції застосовується для доведення тверджень, які залежать від натурального числа n. У його основі лежить **принцип повної індукції**: **Якщо будь-яке твердження доведене при** $n=1$(у випадку, якщо при $n=1$ твердження не має сенсу, то перевірку роблять для найменшого значення n, при якому воно має сенс) **і якщо з припущення, що воно справедливе для натурального** $n=k$**, випливає, що воно правильне для наступного натурального числа** $n=k+1$**, тоді це твердження правильне для будь-якого натурального числа.**

Перевірка справедливості твердження при $n=1$ називається **базою індукції.** Доведення твердження при $n=k+1$, у припущенні його справедливості при $n=k$, називається **індуктивним переходом** і позначається $k \to k+1$.

Приклад 2.7.1. Довести, що $a_n = n^3 + 3n^2 + 5n$ ділиться на 3.

Розв'язання: Перевіримо базу індукції, тобто a_1, $n=1$.

$a_1 = 1^3 + 3\cdot 1^2 + 5\cdot 1 = 9$ ділиться на 3.

База індукції правильна.

1) Індуктивний перехід $k \to k+1$.

Припустимо, що для деякого натурального $n=k$

$a_k = k^3 + 3k^2 + 5k$ ділиться на 3.

Покажемо, що звідси витікає твердження при $n=k+1$:

$$a_{k+1} = (k+1)^3 + 3(k+1)^2 + 5(k+1) = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 3k^2 + 6k + 3 + 5k + 5 =$$
$$= \left(k^3 + 3k^2 + 5k\right) + 3k^2 + 9k + 9 = a_k + 3\left(k^2 + 3k + 3\right).$$

a_k ділиться на 3 за індуктивним припущенням, а $3\left(k^2 + 3k + 3\right)$ має «3» множником, значить, на підставі принципу математичної індукції можна стверджувати, що $a_n = n^3 + 3n^2 + 5n$ ділиться на 3 для будь-якого натурального *n*.

Приклад 2.7.2. Довести формулу

$$1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots + (2n-1)^3 = n^2\left(2n^2 - 1\right).$$

Розв'язання: Перевіримо базу індукції: $1^3 = 1^2\left(2\cdot 1^2 - 1\right)$, 1=1. База індукції правильна.

Індуктивний перехід $k \to k+1$.

Припустимо, що для деякого натурального $n=k$ формула правильна, тобто

$$1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots + (2k-1)^3 = k^2\left(2k^2 - 1\right).$$

Покажемо, що звідси витікає аналогічна рівність при $n = k + 1$:

$$1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots + \left(2k - 1\right)^3 + (2(k+1) - 1)^3 = k^2\left(2k^2 - 1\right) + (2k + 2 - 1)^3 =$$

$$= k^2(2k^2 - 1) + (2k+1)^3 = 2k^4 - k^2 + 8k^3 + 12k^2 + 6k + 1 =$$

$$= (k^2 + 2k + 1)(2k^2 + 4k + 1) = (k+1)^2(2(k+1)^2 - 1)$$

Тепер на підставі принципу математичної індукції можна стверджувати справедливість даної формули для будь-якого натурального *n*.

Приклад 2.7.3. Довести формулу

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n! = \left(n+1\right)! - 1, \qquad (2)$$

де $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$.

Розв'язання:

1) Перевіримо базу індукції $n = 1$.

$$1 \cdot 1! = \left(1+1\right)! - 1; \qquad 1 = 1.$$

База індукції правильна.

2) Індуктивний перехід $k \to k+1$.

Припустимо, що для деякого натурального $n = k$ формула правильна, тобто

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + k \cdot k! = \left(k+1\right)! - 1.$$

Тоді для $n = k + 1$

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + k \cdot k! + \left(k+1\right) \cdot \left(k+1\right)! =$$

$$= \left(k+1\right)! - 1 + \left(k+1\right) \cdot \left(k+1\right)! = \left(k+1\right)!\left(1 + k + 1\right) - 1 = \left(k+2\right)! - 1.$$

На підставі принципу математичної індукції можна стверджувати справедливість формули (2) для будь-якого натурального *n*.

Приклад 2.7.4. Для будь-яких натуральних n довести нерівність $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2^n - 1} \le n$.

Розв'язання:

1. Перевіримо базу індукції 1=1. База індукції правильна.

2. Індуктивний перехід $k \to k+1$. Припустимо, що при $n = k$ формула правильна, тобто $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{2^k-1} \le k$.

Для $n = k+1$:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{2^k-1}+\frac{1}{2^{k+1}-1} \le k+\frac{1}{2^{k+1}-1} \le k+1,$$

оскільки k – натуральне.

За допомогою принципу математичної індукції ми довели надану нерівність для будь-якого натурального *n*.

2.8. Булеві алгебри

У цьому підрозділі будемо припускати, що змінні $p, q, r...$ алгебри висловлювань приймають значення «1» та «0», не надаючи цим значенням ані змісту значень «істинності», ані будь-якого іншого конкретного сенсу. У двоелементній множині $\{0,1\}$ ми визначимо операції, які назвемо, як і в змістовній алгебрі висловлювань, «запереченням», «кон'юнкцією» і «диз'юнкцією», але не будемо надавати їм жодного «конкретного» змісту і станемо виходити тільки з їх формальних визначень – табличних або в такій формі:

1. $$\overline{p} = \neg p = \begin{cases} 0, \ \textit{якщо} \ p = 1, \\ 1, \ \textit{якщо} \ p = 0. \end{cases}$$

2. $$p\,q = \begin{cases} 1, \ \textit{якщо} \ p = 1 \ \textit{та} \ q = 1, \\ 0, \ \textit{в усіх інших випадках}. \end{cases}$$

3. $$p \vee q = \begin{cases} 0, \ \textit{якщо} \ p = 0 \ \textit{та} \ q = 0, \\ 1, \ \textit{в усіх інших випадках}. \end{cases}$$

Кон'юнкцію $p\,q$ называють також добутком, а p, q співмножниками. Диз'юнкцію $p \vee q$ сумою, а p, q – доданками.

Неважко помітити, що якщо зіставити «1» істинне висловлювання, а «0» хибне, то наведені тут визначення збігаються з визначеннями цих операцій в «змістовній» алгебрі висловлювань (підрозділ 2.1). Звідси випливає, що всі еквівалентності – закони логіки висловлювань (1) - (13) (підрозділ 2.3), складені за допомогою знаків трьох операцій $\neg, \wedge, \vee$, зберігаються в нашій новій «абстрактній» алгебрі. (Еквівалентність формул позначимо тут звичайним знаком рівності «=».)

Функції цієї абстрактної алгебри – ми будемо називати її **булевою алгеброю** (так само як самі функції – **булевими функціями**) – не інтерпретуються як функції – висловлювання, які обертаються в істинні чи хибні висловлювання, а просто як двозначні функції від двозначних аргументів , визначені на множині $\{0,1\}^n$ (функціїn змінних) і які приймають значення в $\{0,1\}$.

Викладена в підрозділі. 2.1-2.3 змістовна алгебра висловлювань – одна з можливих моделей абстрактної булевої алгебри.

До логічних операцій, відомих з алгебри висловлювань, додаються ще дві: «стрілка Пірса» та «штрих Шефера».

Стрілка Пірса $f_8(x_1, x_2) = x_1 \downarrow x_2 = \overrightarrow{x_1 \vee x_2}$ є істинною тоді й тільки тоді, коли висловлювання x_1 та x_2 хибні одночасно.

Штрих Шефера $f_{14}(x_1, x_2) = x_1 \mid x_2 = \overline{x_1 \vee x_2}$ є істинним тоді й тільки тоді, коли висловлювання x_1 та x_2 істинні одночасно.

Булеву функцію n змінних називають n – містною. Область її визначення – множина E_2^n, усіх можливих двійкових наборів довжиною n. Відомо,що цих наборів існує 2^n. Наведемо набори у двійковому коді у таблиці 2.8.1 в порядку зростання від 0 до $2^n - 1, (n = 4)$.

Таблиця 2.8.1

№ набору	x_1	x_2	x_3	x_4
0	0	0	0	0
1	0	0	0	1
2	0	0	1	0
3	0	0	1	1
4	0	1	0	0
5	0	1	0	1
6	0	1	1	0
7	0	1	1	1
8	1	0	0	0
9	1	0	0	1
10	1	0	1	0
11	1	0	1	1
12	1	1	0	0
13	1	1	0	1
14	1	1	1	0
15	1	1	1	1

Стовпець значень булевої функції складається з 2^n нулів та одиниць. Отже, n-містних булевих функцій є стільки (за комбінаторним правилом множення), скільки існує наборів довжиною 2^n з 0 і 1, а саме 2^{2^n}. Тому має місце таке твердження.

Теорема 2.8.1. Кількість різних логічних функцій n змінних дорівнює 2^{2^n}.

2-містних булевих функцій є $2^{2^2}=16$, 3-містних $2^{2^3}=256$, 4-містних $2^{2^4}=65536$, а 5-містних – більше 4 млрд.

Існує чотири логічні функції одного аргументу, таблиця 2.8.2/

Таблиця 2.8.2

x	**0**	**1**	x	$\overline{x}$
0	0	1	0	1
1	0	1	1	0

$f_1(x)=\mathbf{0}$ – константа **0;** $f_2(x)=\mathbf{1}$– константа,

$f_3(x)=x$ – тотожна функція *x*;

$f_4(x)=\overline{x}$ – заперечення *x*.

Наведемо таблицю істинності 16 логічних функцій двох аргументів, кожна з яких визначена на 4 наборах змінних.

Таблиця 2.8.3.

Змінна		Функція ***f***															
x_1	x_2	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

$f_0(x_1,x_2)=\mathbf{0}$ **–** константа **0;**

$f_1(x_1,x_2)=x_1x_2$ – кон’юнкція**;**

$f_2(x_1,x_2)=x_1\overline{x}_2$ – аналог різниці множин $A\setminus B$**,** підрозд.1.4;

$f_3(x_1,x_2)=x_1$**;**

$f_4(x_1,x_2)=x_2\overline{x}_1$ – аналог різниці множин $B\setminus A$, підрозд.1.4;

$f_5(x_1,x_2)=x_2$;

$f_6(x_1,x_2)=x_1\oplus x_2$ – додавання за mod2, альтернативне «або» («або, або»);

$f_7(x_1,x_2)=x_1\vee x_2$ – диз’юнкція;

$f_8(x_1,x_2)=x_1\downarrow x_2$ – стрілка Пірса;

$f_9(x_1,x_2)=x_1 \sim x_2$ – еквівалентність;

$f_{10}(x_1,x_2)=\overline{x}_2$ – інверсія x_2;

$f_{11}(x_1,x_2)=x_2\to x_1$ – імплікація від x_2 до x_1;

$f_{12}(x_1,x_2)=\overline{x}_1$ – інверсія x_1;

$f_{13}(x_1,x_2)=x_1\to x_2$ – імплікація від x_1 до x_2;

$f_{14}(x_1,x_2)=x_1\mid x_2$ – штрих Шефера;

$f_{15}(x_1,x_2)=1$ – константа 1**.**

Означення. Змінна x_2 функції $f(x_1,\ldots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\ldots,x_n)$ називається **неістотною (фіктивною),** якщо існує такий набір значень решти змінних $(a_1,\ldots,a_{i-1},a_{i+1},\ldots,a_n)$, що $f(a_1,\ldots,a_{i-1},0,a_{i+1},\ldots,a_n)=$ $=f(a_1,\ldots,a_{i-1},1,a_{i+1},\ldots,a_n)$ для будь-яких значень решти змінних. Це означає, що значення x_i в довільному наборі значень $x_1,\ldots,x_n$ не змінює значення функції та $f(x_1,\ldots,x_n)$ насправді залежить від (*n*–1) змінних. Твердження теореми 2.8.1 передбачає, що враховуються всі булеві функції *n* змінних, включаючи функції з фіктивними змінними. Зокрема, фіктивні змінні мають функції $f_3(x_1,x_2)=x_1$, $f_5(x_1,x_2)=x_2$, $f_{10}(x_1,x_2)=\overline{x}_2$, $f_{12}(x_1,x_2)=\overline{x}_1$.

Серед усіх булевих функцій однієї та двох змінних виділимо **основні елементарні функції**, змінивши для зручності порядкові номери деяких з них.

$f_1(x)=\mathbf{0}$ **–** константа **0**;

$f_2(x)=\mathbf{1}$ **–** константа **1**;

$f_3(x)=x$ – тотожна функція *x;*

$f_4(x)=\overline{x}$ – заперечення *x*;

$f_5(x_1,x_2)=x_1x_2$ – кон'юнкція;

$f_5(x_1,x_2)=x_1\vee x_2$ – диз'юнкція;

$f_7(x_1,x_2)=x_1\to x_2$ – імплікація від x_1 до x_2;

$f_8(x_1,x_2)=x_1 \Box x_2$ – еквівалентність;

$f_9(x_1,x_2)=x_1\oplus x_2$ – додавання за mod2, альтернативне «або» («або, або»);

$f_{10}(x_1,x_2)=x_1\mid x_2$ – штрих Шефера;

$f_{11}(x_1,x_2)=x_1\downarrow x_2$ – стрілка Пірса.

За допомогою основних елементарних функцій можна подати будь-яку булеву функцію аналітично (у вигляді формули) і це буде представлено далі.

Основні еквівалентності, які називаються законами алгебри Буля:

1. Закони комутативності: а) $p\wedge q\equiv q\wedge p$, б) $p\vee q\equiv q\vee p$.

2. Закони асоціативності: а) $\left(p\wedge q\right)\wedge r\equiv p\wedge\left(q\wedge r\right)$,

б) $\left(p\vee q\right)\vee r\equiv p\vee\left(q\vee r\right)$.

3. Закони дистрибутивності: а) $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$,

б) $p \vee (q \wedge p) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$.

4.Закони де Моргана: а) $\overline{p \vee q} \equiv \bar{p} \wedge \bar{q}$, б) $\overline{p \wedge q} \equiv \bar{p} \vee \bar{q}$.

5.Закон подвійного заперечення $\bar{\bar{p}} \equiv p$.

6. Закони ідемпотентності: а) $p \vee p \equiv p$, б) $p \wedge p \equiv p$.

7. Закони сталих: а) $p \wedge 1 \equiv p$, б) $p \wedge 0 \equiv 0$,

в) $p \vee 1 \equiv 1$, г) $p \vee 0 \equiv p$,

д) $\bar{1} \equiv 0$, е) $\bar{0} \equiv 1$.

8.Закони поглинання: а) $p \vee (p \wedge q) \equiv p$, б) $p \wedge (p \vee q) \equiv p$.

9. Закон виключеного третього $p \vee \bar{p} \equiv 1$.

10. Закон суперечності $p \wedge \bar{p} \equiv 0$.

Принцип двоїстості в алгебрі Буля. Якщо у формулі F, що реалізує функцію f, усі кон'юнкції замінити на диз'юнкції, а диз'юнкції – на кон'юнкції, 1 – на 0, 0 – на 1, то отримаємо формулу F^*, яка реалізує функцію f^*, двоїсту до f.

Приклад 2.8.1. Знайдемо функцію, двоїсту до $f(x,y,z) = xy \vee \bar{z}(x \vee \bar{u}y)$.

Використовуємо формулу $f^*(x_1, x_2, ..., x_n) = \overline{f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n)}$.

$$f^*(x,y,z,t) = \overline{\bar{x}\,\bar{y} \vee \bar{\bar{z}}(\bar{x} \vee \overline{\overline{ty}})} = \overline{\bar{x}\,\bar{y} \vee \bar{z}(\bar{x} \vee \bar{t}\;\bar{y})} = (x \vee y)(\bar{z} \vee x(\bar{u} \vee y)).$$

Якщо функції рівні, то й двоїсті до них функції також рівні. Це дає змогу отримувати нові еквівалентності за допомогою принципу двоїстості. Для цього потрібно від еквівалентності $F_1 = F_2$ перейти до $F_1^* = F_2^*$.

2.9. Нормальні форми булевих функцій

2.9.1. Диз'юнктивні нормальні форми

Нехай x булева змінна, σ – булева стала, яка дорівнює 0 чи 1. Позначимо

$$x^{\sigma} = \begin{cases} \overline{x}, \ \text{якщо } \sigma = 0, \\ x, \ \text{якщо } \sigma = 1. \end{cases}$$

Зауважимо, що $\sigma^{\sigma} = 1$.

Зафіксуємо множину n булевих змінних $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$.

Елементарною кон'юнкцією рангу r називають вираз $k = x_{i_1}^{\sigma_1} x_{i_2}^{\sigma_2} ... x_{i_r}^{\sigma_r}$, де x_{i_j} – змінні з множини *X,* причому всі x_{i_j} різні. Тобто елементарна кон'юнкція рангу r – це логічний добуток r різних змінних з X, взятих із запереченням, або без нього.

У разі r = 0 кон'юнкцію називають **порожньою** та вважають такою, що дорівнює 1.

Приклад 2.9.1.1. Елементарні кон'юнкції є 1, x_1, $\overline{x}_2$, $\overline{x}_2\overline{x}_3$, $x_1\overline{x}_2\overline{x}_3$, а вирази 0, $x_1x_2x_2$, $\overline{x_1x_3}$ – не елементарні кон'юнкції.

Конституента одиниці – це елементарна кон'юнкція, яка містить усі змінні з множини *X,* інакше, це елементарна кон'юнкція рангу n. Всіх різних конституент одиниці для фіксованої множини n змінних $x_1, x_2, ..., x_n$ стільки, скільки існує двійкових наборів з n компонентами, тобто 2^n.

Диз'юнктивною нормальною формою (*ДНФ*) називають диз'юнкцію $D = k_1 \vee k_2 \vee ... \vee k_n$ елементарних кон'юнкцій k_j, у якій k_j попарно різні.

Досконалою диз'юнктивною нормальною формою (*ДДНФ*) називають ДНФ, у якій кожна елементарна кон'юнкція $k_j \,(j = 1,...,s)$ – конституента одиниці.

ТЕОРЕМА 2.9.1. Будь-яку булеву функцію $f(x_1, x_2, ..., x_n) \neq 0$ можна єдиним способом подати в ДДНФ.

Наведемо два алгоритми подання довільної логічної функції у ДДНФ.

Алгоритм 1.

1.Задана функція подається таблицею.

2. Для кожного набору, на якому функція є 1 будується відповідна йому конституанта одиниці.

3. Диз'юнкція цих конституант одиниці є ДДНФ даної функції.

Приклад 2.9.1.2. Задану функцію подати таблицею та побудувати її ДДНФ.

$$f = (x \to y) \square zy$$

Таблиця 2.9.2

x	y	z	$x \to y$	zy	$(x \to y) \square zy$
0	0	0	1	0	0
0	0	1	1	0	0
0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1
1	0	1	0	0	1
1	1	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

Відповідно до пп. 2-3 алгоритму одержимо шукану ДДНФ

$$f = xyz \vee x\bar{y}z \vee x\bar{y}\,\bar{z} \vee \bar{x}yz.$$

Наведемо логічні операції **розщеплення, склеювання** та **поглинання,** які застосовуються при перетвореннях, зокрема при мінімізації булевих функцій.

Будь-яку ДНФ можна звести до ДДНФ **розщепленням (розгортанням)** кон’юнкцій, які містять не всі змінні: якщо елементарна кон’юнкція k не містить змінної x, то $k = k(x \vee \bar{x}) = kx \vee k\bar{x}$.

Повне та **неповне склеювання** визначаються рівностями

$kx \vee k\bar{x} = k,\ kx \vee k\bar{x} = k \vee kx \vee k\bar{x}$.

Склеювання називають **неповним**, оскільки члени kx та $k\bar{x}$ залишаються в правій частині та водночас можуть склеюватися з іншими конституантами одиниці. П**оглинання** визначається рівностями $x \vee xk = x,\ x(x \vee k) = x$.

Алгоритм 2.

На першому етапі формулу перетворюють на рівносильну, побудовану зі змінних і їх заперечень за допомогою самих лише кон’юнкцій і диз’юнкцій. Для цього використовують закони де Моргана та закон подвійного заперечення.

На другому етапі домагаються, щоб усі кон’юнкції виконувалися раніше, ніж диз’юнкції, для чого розкривають дужки на підставі дистрибутивного закону для кон’юнкції $(x \vee y)z = xz \vee yz$ або рівносильності $(x \vee y)(z \vee u) = xz \vee yz \vee xu \vee yu.$ Далі, з використанням співвідношень для констант і закону суперечності, вилучають нулі та, виходячи із законів ідемпотентності, об’єднують рівні члени. На цьому процес отримання ДНФ закінчують. Далі, за допомогою операції розщеплення та законів ідемпотентності, приходять до ДДНФ.

Приклад 2.9.1.3. Перетворити за алгоритмом 2 до ДДНФ функцію з прикладу 2.9.1.2.

$$f = (x \to y) \square\ zy = (\bar{x} \vee y) \square\ zy = (\bar{x} \vee y)zy \vee \overrightarrow{(\bar{x} \vee y)}\overrightarrow{zy} =$$

$$= \bar{x}yz \vee yz \vee x\bar{y}(\bar{z} \vee \bar{y}) = \bar{x}yz \vee yz \vee x\bar{y}\,\bar{z} \vee x\bar{y} = \bar{x}yz \vee xyz \vee \underline{\bar{x}yz} \vee$$

$$\vee x\bar{y}\,\bar{z} \vee x\bar{y}z \vee \underline{x\bar{y}\,\bar{z}} = xyz \vee x\bar{y}z \vee x\bar{y}\,\bar{z} \vee \bar{x}yz\,.$$

ДДНФ співпадає з одержаною у попередньому прикладі.

Зауважимо, що у прикладі 2.9.3 використано формули $x \to y = \bar{x} \vee y,\ x \sim y = xy \vee \bar{x}\,\bar{y}$, розгортання кон'юнкції yz за змінною x та кон'юнкції $x\bar{y}$ за змінною z, а також ідемпотентність підкреслених доданків.

2.9.2. Кон'юнктивні нормальні форми

Двоїстим способом, замінюючи в означеннях нулі одиницями й навпаки, диз'юнкції кон'юнкціями й навпаки, означають поняття елементарної диз'юнкції, конституенти нуля, кон'юнктивної нормальної форми, досконалої кон'юнктивної нормальної форми.

Нехай, як і раніше, зафіксовано множину $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$.

Елементарною диз'юнкцією називають вираз $k = x_{i_1}^{\sigma_1} \vee x_{i_2}^{\sigma_2} \vee ... \vee x_{i_r}^{\sigma_r}$, у якому всі x_{ij} різні, x_{ij} є *X*. Число r називають **рангом диз'юнкції**. Якщо $r = 0$, диз'юнкцію називають **порожньою** та вважають такою, що дорівнює 0. Наприклад, елементарні диз'юнкції: $\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_5, 0, \bar{x}_1 \vee x_3$.

Кон'юнктивною нормальною формою (*КНФ*) називають кон'юнкцію $d_1 \wedge d_2 \wedge ... \wedge d_s$ елементарних диз'юнкцій d_j, у якій усі d_j різні.

Є алгоритм, який дає змогу для будь-якої формули булевої алгебри знайти рівносильну до неї КНФ. Перший етап цього алгоритму такий самий, як і для побудови ДНФ (алгоритм 2). На другому етапі прагнуть, щоб усі диз'юнкції виконувалися раніше кон'юнкцій. Для цього потрібно скористатися дистрибутивним законом $x \vee yz = (x \vee y)(x \vee z)$ або наслідком із нього $xy \vee zu = (x \vee y)(x \vee u)(y \vee z)(y \vee u).$ Потім на підставі співвідношень для констант і закону виключеного третього, вилучають одиниці, та на підставі законів ідемпотентності об’єднують рівні члени.

Приклад 2.9.2.1. Знайдемо КНФ для формули $\overline{x \vee z}(x \to y)$. Застосовуючи наведений алгоритм, одержимо

$$\overline{x \vee z}(x \to y) = \overline{x \vee z}(\bar{x} \vee y) = \bar{x}\bar{z}(\bar{x} \vee y).$$

Елементарну диз’юнкцію, яка містить усі змінні з множини X, називають **конституантою нуля**. Інакше кажучи, конституента нуля – це елементарна диз’юнкція з рангом *n.* Кожному двійковому набору $\tilde{b}_n = (b_1, b_2, ..., b_n)$ значень змінних відповідає єдина конституента нуля $x_1^{\bar{b}_1} x_2^{\bar{b}_2} ... x_n^{\bar{b}_n}$, яка перетворюється на ньому в 0. Усі інші конституенти нуля на цьому наборі перетворюються в 1. Наприклад, набору 0111 відповідає конституента нуля $x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4$.

Досконалою кон’юнктивною нормальною формою (ДКНФ) називають КНФ, у якій кожна елементарна диз’юнкція $d_j \ (j = 1,...,s)$ – конституента нуля.

Кожну булеву функцію $f(x_1, x_2, ..., x_n) \neq 1$ можна подати досконалою КНФ.

ДКНФ за таблицею булевої функції f будують так. Виділяють набори, на яких функція має значення 0, і для кожного з них записують відповідну конституенту нуля. Кон’юнкція цих конституент нуля являє собою ДКНФ функції f.

Приклад 2.9.2.2. Побудуємо ДКНФ для функції, заданої табл. 2.9.2. Функція набуває значення 0 на наборах (000), (001), (010) і (110), отже $f(x, y, z) = (x \vee y \vee z)(x \vee y \vee \bar{z})(x \vee \bar{y} \vee z)(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z)$.

Зазначимо, що за допомогою тотожних перетворень будь-яку КНФ можна перетворити на ДКНФ. Якщо в якусь елементарну диз'юнкцію d не входить змінна x, то потрібно записати рівносильний вираз $d \vee x\bar{x}$ та застосувати дистрибутивний закон: $d \vee x\bar{x} = (d \vee x)(d \vee \bar{x})$. Після тривіальних перетворень отримаємо ДКНФ.

2.10. Мінімізація булевих функцій

2.10.1. Основні означення. Скорочена ДНФ

Розглянемо лише мінімізацію ДНФ, тому що за принципом двоїстості з методів мінімізації ДНФ можна отримати методи мінімізації КНФ.

Мінімальною ДНФ булевої функції називають її ДНФ, яка складається з найменшої можливої кількості букв. При цьому кожну букву враховують стільки разів, скільки вона зустрічається в ДНФ. Наприклад, ДНФ $xy \vee yz \vee xz$ складається з шести букв.

Імплікантою булевої функції $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ називається елементарна кон'юнкція, яка набуває значення 1 на тих і тільки тих наборах значень змінних, на яких ця функція дорівнює 1.

Наприклад, ДНФ функції з прикладу 2.9.1.2 складається з 4-х імплікант $f = xyz \vee x\bar{y}z \vee x\bar{y}\,\bar{z} \vee \bar{x}yz$.

Власною частиною елементарної кон'юнкції називають елементарну кон'юнкцію, отриману із заданої вилученням однієї або кількох змінних.

Простою імплікантою заданої булевої функції f називається імпліканта функції, кожна власна частина якої вже не є імплікантою функції f.

Скороченою **диз'юнктивною нормальною формою (СДНФ)** булевої функції f називається диз'юнкція всіх простих імплікант цієї функції.

Теорема 2.10.1. СДНФ$D_{скор}$ булевої функції f задає цю функцію, однозначно, тобто $f = D_{скор}$. для кожної функції є єдиною.

Зв'язок між мінімальною та скороченою ДНФ визначає наступна теорема.

Теорема 2.10.2. Мінімальну ДНФ булевої функції f можна одержати з її СДНФ вилученням деяких елементарних кон'юнкцій.

Диз'юнктивну нормальну форму $D_{туп}$, яка задає функцію f (тобто $f = D_{туп}$), називають **тупиковою** ДНФ цієї функції, якщо:

а) кожна елементарна кон'юнкція з $D_{туп}$ – проста імпліканта функції f;

б) вилучення з формули $D_{туп}$ довільного диз'юнктивного члена призводить до ДНФ D_1, яка не задає функцію f, тобто $f \neq D_1$.

Теорема 2.10.3. Мінімальна ДНФ булевої функції становить її тупикову ДНФ.

Існують тупикові, але не мінімальні ДНФ, одна й та сама булева функція f може мати декілька різних мінімальних ДНФ.

З теорем 2.10.2 і 2.10.3 випливає, що відшукання мінімальних ДНФ можна поділити на два етапи:

1. Побудова скороченої ДНФ.
2. Побудова всіх тупикових ДНФ і вибір із них мінімальних.

2.10.2. Побудови скороченої ДНФ методом Квайна

Теорема Квайна. Якщо в ДДНФ логічної функції f здійснити всі операції неповного склеювання, а потім усі операції поглинання, то буде одержана СДНФ цієї функції.

Алгоритм побудови скороченої ДНФ складається з таких кроків:

1. Булеву функцію $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, яку потрібно мінімізувати, перетворити у ДДНФ.

2. У f виконати всі неповні склеювання та одержати імпліканти, що мають по $n-1$ змінних.

3. Виконати поглинання всіх конституант одиниці першого кроку.

4. Виконати неповне склеювання та поглинання імплікант з $n-1$ змінних по аналогії з пунктами 2-3. Ця процедура повторюється доти, доки операції неповного склеювання залишаються можливими. В результаті буде одержано СДНФ.

Приклад 2.10.2.1. Знайти СДНФ для ДДНФ з прикладу2.9.2.2.

$$f = xyz \vee x\bar{y}z \vee x\bar{y}\,\bar{z} \vee \bar{x}yz\,.$$

Розв'язання.1. Пронумеруємо всі конституанти одиниці функції $f = \overset{1}{xyz} \vee \overset{2}{x\bar{y}z} \vee \overset{3}{x\bar{y}\,\bar{z}} \vee \overset{4}{\bar{x}yz}$ та виконаємо всі операції неповного склеювання елементарних кон'юнкцій, починаючи з першої, із рештою.

2. Результати неповного склеювання подано в таблиці 2.10.1, де 1-й стовпчик номери конституент одиниці, 2-й – результат склеювання, 3 – змінні, за якими відбулося склеювання.

Таблиця 2.10.1

Номери склеюваних конституент	Імпліканта	Склеювана змінна
1. 1-2	xz	y
2. 1-4	yz	x
3 2-3	$x\bar{y}$	z

Подальше склеювання неможливе. Отже, після поглинання цими імплікантами відповідних їм конституент одиниці, одержимо скорочену ДНФ:

$$f = xz \vee yz \vee x\bar{y}.$$

2.10.3. Мінімізація булевих функцій методом Квайна

Метод мінімізації розглянемо на прикладі. Спочатку буде знайдено СДНФ, а згодом мінімальну ДНФ.

Приклад 2.10.3.1. Знайти СДНФ та мінімальну ДНФ логічної функції:

$$f = xy \vee \bar{x}z \vee \bar{y}\,\bar{z}.$$

Розв’язання. За допомогою операції розгортання одержимо ДДНФ даної функції:

$$f = xy \vee \bar{x}z \vee \bar{y}\,\bar{z} = xy(z \vee \bar{z}) \vee \bar{x}(y \vee \bar{y})z \vee (x \vee \bar{x})\bar{y}\,\bar{z} =$$
$$= xyz \vee xy\bar{z} \vee \bar{x}yz \vee \bar{x}\,\bar{y}z \vee x\bar{y}\,\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}\,\bar{z}.$$

1. Пронумеруємо усі конституанти одиниці функції

$$f = \overset{1}{xyz} \vee \overset{2}{xy\bar{z}} \vee \overset{3}{\bar{x}yz} \vee \overset{4}{\bar{x}\,\bar{y}z} \vee \overset{5}{x\bar{y}}\,\bar{z}\ \overset{6}{\bar{x}\bar{y}}\,\bar{z}$$

та виконаємо всі операції неповного склеювання елементарних кон’юнкцій, починаючи з першої, з рештою.

2. Результати неповного склеювання подано в таблиці 2.10.2, де 1-й стовпчик номери конституент одиниці, 2-й – результат склеювання, 3 – змінні, за якими відбулося склеювання.

Подальше склеювання неможливо. Наведені в таблиці імпліканти є простими. Отже, після поглинання цими імплікантами відповідних їм конституант одиниці, одержимо скорочену ДНФ:

$$f = xy \vee yz \vee x\bar{z} \vee \bar{x}z \vee \bar{x}\,\bar{y} \vee \bar{y}\,\bar{z}.$$

Таблиця 2.10.2

Номери склеюваних конституент		Імпліканта	Склеювана змінна
1.	1-2	xy	z
2.	1-3	yz	x
3	2-5	$x\overline{z}$	y
4.	3-4	$\overline{x}z$	y
5.	4-6	$\overline{x}\,\overline{y}$	z
6.	5-6	$\overline{y}\,\overline{z}$	x

Серед одержаних шести можливих простих імплікант є добутки, які входять до початкової функції. Тому імпліканти yz, $x\overline{z}$, $\overline{x}\,\overline{y}$ вважаються зайвими. З цього прикладу випливає, що СДНФ далеко не завжди є мінімальною ДНФ, оскільки вона містить надлишкові імпліканти. Таким чином, прийшли до етапу розв'язання, який потребує знайти тупикові ДНФ. Нагадаємо, що **тупикова ДНФ** – це диз'юнкція простих імплікант, жодна з яких не є зайвою.

Тупикових ДНФ у загальному випадку може бути декілька. Кожна з цих функцій може містити кількість букв, відмінну для кількості для решти функцій.

Означення. Тупикова ДНФ, яка містить мінімальну кількість букв, називається **мінімальною ДНФ**.

Деякі логічні функції можуть мати кілька мінімальних ДНФ, які містять однакову кількість букв. У такому випадку обирається мінімальна ДНФ, яка більш придатна, порівняно з іншими, для реалізації у цифровому пристрої.

Для визначення мінімальної ДНФ використовують **імплікантні таблиці.** Розглянемо імплікантну таблицю для функції з прикладу 2.10.3.1. Стовпці таблиці позначено конституантами одиниці логічної функції, а рядки – простими імплікантами з СДНФ. Якщо імпліканта є власною частиною деякої конституанти одиниці, то перетин рядка цієї імпліканти та стовпця, що відповідає коституенті одиниці відмічається зірочкою. Для одержання мінімальної ДНФ заданої функції достатньо знайти мінімальну кількість імплікант, які разом накривають зірочками всі стовпці імплікантної таблиці.

Мінімальна кількість імплікант, що накривають зірочками всі стовпці таблиці 2.10.3 є 3: xy накриває 1-й та 2-й, $\overline{x}z$ – 3-й та 4-й, $\overline{y}\,\overline{z}$ – 5-й та 6-й. Інакше: yz накриває 1-й та 3-й, $x\overline{z}$ 2-й та 5-й, $\overline{x}\,\overline{y}$ 4-й та 6-й.

Дана логічна функція має дві тупикових ДНФ з однаковим мінімальним числом 6 букв:

1. $f = xy \vee \overline{x}z \vee \overline{y}\,\overline{z}$.

2. $f = yz \vee x\overline{z} \vee \overline{x}\,\overline{y}$.

Нагадаємо, що перший етап мінімізації булевої функції – це побудова скороченої ДНФ. Чотири кроки цього етапу наведені в підрозділі 2.10.2. Згідно з наведеним прикладом, дамо решту кроків, необхідних для мінімізації булевих функцій.

5. За одержаною ДНФ будується імплікантна таблиця.

6. В імплікантній таблиці знаходять набори простих імплікант, які накривають зірочками усі конституанти одиниці функції f.

Таблиця 2.10.3

Проста імпліканта	Конституента					
	xyz	$xy\overline{z}$	$\overline{x}yz$	$\overline{x}\,\overline{y}z$	$x\overline{y}\,\overline{z}$	$\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}$
xy	*	*				
yz	*		*			
$x\overline{z}$		*			*	
$\overline{x}z$			*	*		
$\overline{x}\,\overline{y}$				*		*
$\overline{y}\,\overline{z}$					*	*

7. Серед цих наборів знаходять один або кілька таких, які в сумі містять мінімальну кількість букв.

8. Об’єднують прості імпліканти цих наборів та одержують одну або декілька мінімальних ДНФ.

2.10.4. Метод карт Карно побудови мінімальних ДНФ

Для відшукання мінімальних ДНФ функцій невеликої кількості n змінних ($n \le 6$) можна застосувати метод карт Карно.

Карта Карно становить спеціальну прямокутну таблицю, яка задає булеву функцію та застосовується для знаходження її тупикових та мінімальних ДНФ. Карта складається з 2^n клітинок, до яких заносяться одиниці при мінімізації функцій заданих у ДДНФ. Якщо функція задана в ДНФ, то її слід попередньо розгорнути в ДДНФ.

Метод застосовують також для мінімізації функцій, поданих у ДКНФ, але ми не будемо його розглядати.

Розглянемо метод карт Карно для функцій трьох і чотирьох змінних. Карта Карно для функції трьох змінних складається з $2^3 = 8$ комірок. Кожному з наборів значень аргументів відповідає одна комірка. Кожна комірка зображає відповідну конституенту одиниці (рис.2.10.1).

	y		$\bar{y}$	
x	xyz	$xv\bar{z}$	$x\bar{y}\bar{z}$	$x\bar{y}z$
$\bar{x}$	$\bar{x}yz$	$\bar{x}y\bar{z}$	$\bar{x}\bar{y}\bar{z}$	$\bar{x}\bar{y}z$
	z	z		z

Рис.2.10.4.1

Якщо на певному наборі значень аргументів функція дорівнює 1, то у відповідній комірці записують 1.

Приклад 2.10.4.1. Побудуємо карту Карно для функції

$$f(x, y, z) = xyz \vee x\bar{y}z \vee \bar{x}yz \vee \bar{x}y\bar{z}.$$

На рис. 2.10.4.2 зображено комірки, які відповідають конституентам одиниці функції f, а на рис.2.10.4.3 – заповнену карту. 1

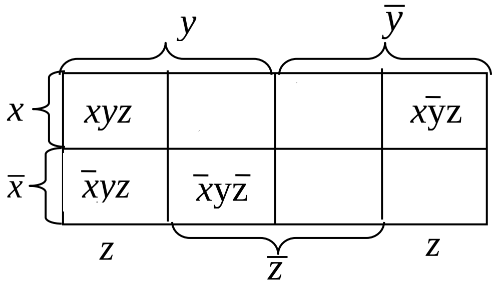


Рис.2.10.4.2

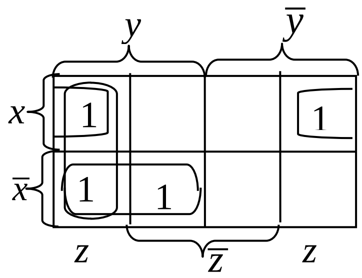


Рис.2.10.4.3

За означенням, повне склеювання $ku \vee k\bar{u} = k$ можна застосувати тільки до конституент (узагалі кажучи, до елементарних кон'юнкцій) зі мінними, у яких усі степені, окрім однієї, збігаються. Наприклад $xyz \vee \bar{x}yz = xz$, такі конституенти називаються **сусідніми.**

Уважають, що в карті Карно для трьох змінних ліва та права межі тотожні (карту згорнуто в циліндр). Блоку з двох сусідніх комірок відповідає елементарна кон'юнкція, що є спільною частиною двох конституент і містить на одну букву менше. Прямокутному блоку з чотирьох сусідніх комірок відповідає елементарна кон'юнкція, що становить спільну частину відповідних чотирьох конституент і містить на дві букви менше. Тому **об'єднувати можна прямокутні блоки на карті Карі які містять сусідні дві, чотири, або – у загальному випадку – 2' одиниць.**

Відшукання мінімальної ДНФ функції за допомогою карти Карно здійснюють так. Знаходять найбільші блоки на карті і накривають усі одиниці найменшою кількістю блоків, першими використовуючи найбільші блоки. Можливо, це можна зробити не одним способом.

Приклад 2.10.4.3. На рис. 2.10.4.3 зображено покриття одиниць карти Карно блоками. Отримаємо мінімальну ДНФ $f_{\min} = xz \vee \bar{x}y \vee yz$.

Приклад 2.10.4.4. Розглянемо функцію

$$f(x,y,z) = xyz \vee x\bar{y}z \vee x\bar{y}\,\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}\,z \vee \bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z}\,.$$

Карту Карно для неї зображено на рис.2.10.4.4. Блоку з чотирьох одиниць відповідає елементарна кон'юнкція $\bar{y}$ із рангом 1, а блоку з двох одиниць – елементарна кон'юнкція xz із рангом 2. Отже, $f_{\min} = \bar{y} \vee xz$.

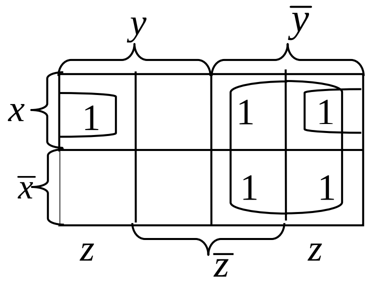


Рис.2.10.4.4

Приклад 2.10.4.5. Карту Карно для функції

$$f(x,y,z) = xy\bar{z} \vee x\bar{y}z \vee x\bar{y}\,\bar{z} \vee \bar{x}yz \vee \bar{x}y\,\bar{z} \vee \bar{x}\,\bar{y}z \vee \bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z}$$

зображено на рис. 2.10.4.5. Мінімальна ДНФ цієї функції $f_{\min} = \bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z}$.

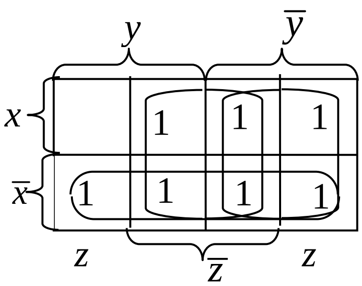


Рис.2.10.4.5

У карті Карно для чотирьох змінних ототожнюють ліву та праву, а також верхню та нижню сторони (рис. 2.10.4.6).

Приклад 2.10.4.6. Знайти мінімальну ДНФ для функції

$$f(x,y,z,w) = xyzw \vee xy\bar{z}w \vee x\bar{y}zw \vee \bar{x}yzw \vee \bar{x}y\bar{z}w \vee$$
$$\vee xyz\bar{w} \vee \bar{x}yz\bar{w} \vee \bar{x}y\bar{z}\,\bar{w} \vee \bar{x}\,\bar{y}z\bar{w} \vee xyz\bar{w}.$$

Карту Карно для неї зображено на рис. 2.10.4.7. Отже,

$$f_{\min} = y \vee xzw \vee \bar{x}z\bar{w}.$$

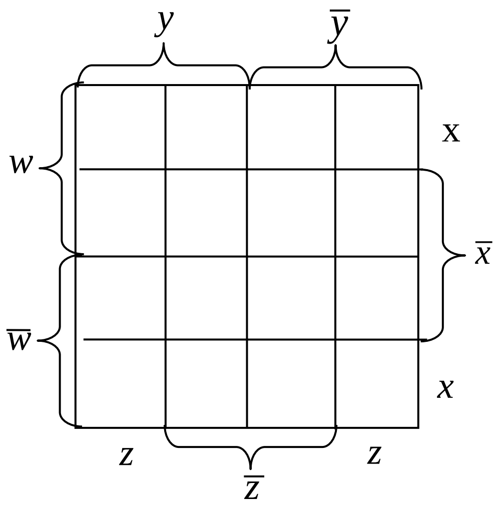


Рис.2.10.4.6.

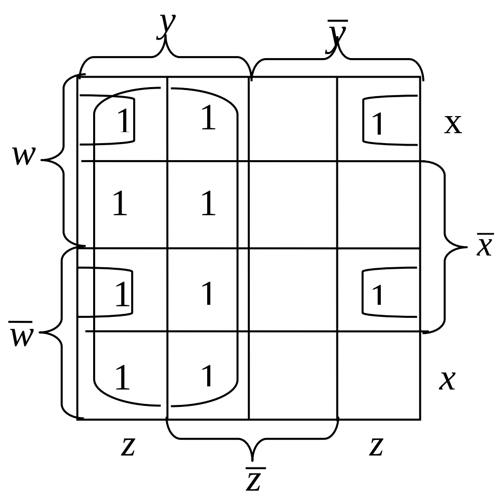


Рис.2.10.4.7.

Приклад 2.10.4.7. Знайти двома методами – Квайна і карт Карно – мінімальну ДНФ логічної функції $f(x, y, z, w)$, яка дорівнює одиниці на наборах з номерами 1, 5, 6, 7, 11, 13, 15 та дорівнює нулю на решті наборів.

Розв'язання. Згідно з таблицею 2.8.1 запису наборів у двійкових аргументах одержимо конституанти одиниці та ДДНФ даної функції

$$f = \overset{1}{\bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z}w} \vee \overset{2}{\bar{x}y\bar{z}w} \vee \overset{3}{\bar{x}yz\bar{w}} \vee \overset{4}{\bar{x}yzw} \vee \overset{5}{x\bar{y}zw} \vee \overset{6}{xy\bar{z}w} \vee \overset{7}{xyzw}.$$

а) мінімізація методом Квайна.

1. Виконаємо всі можливі операції неповного склеювання кожного з доданків з іншими. Результати склеювання наведені у таблиці 2.10.4.1.

Таблиця 2.10.4.1

Номери склеюваних конституант		Імпліканта	Склеювана змінна
1.	1-2	$\bar{x}\,\bar{z}w$	y
2	2-4	$\bar{x}yw$	z
3	2-6	$y\bar{z}w$	x
4.	3-4	$\bar{x}yz$	w
5.	5-7	xzw	y
6.	6-7	xyw	z

Із таблиці видно, що всі конституенти одиниці поглинаються імплікантами, отриманими після склеювання. В результаті одержана функція: $f=\overset{1}{\bar{x}\,\bar{z}w}\vee\overset{2}{\bar{x}yw}\vee\overset{3}{y\bar{z}w}\vee\overset{4}{\bar{x}yz}\vee\overset{5}{xzw}\vee\overset{6}{xyw}$.

2. Для отриманої функції можлива єдина операція неповного склеювання.

Таблиця 2.10.4.2

Номери склеюваних конституант	Імпліканта	Склеювана змінна
1. 2-6	yw	x

Після відповідного поглинання одержимо

$$f=yw\vee\bar{x}\,\bar{z}w\vee y\bar{z}w\vee\bar{x}yz\vee xzw$$

До цього виразу неможливо застосувати операції неповного склеювання та поглинання. Отже, це СДНФ даної функції.

Таблиця 2.10.4.3

Проста імпліканта	Конституента						
	$x\bar{y}\,\bar{z}w$	$\bar{x}y\bar{z}w$	$\bar{x}yz\bar{w}$	$\bar{x}yzw$	$x\bar{y}zw$	$xy\bar{z}w$	$xyzw$
yw		*		*		*	*
$\bar{x}\,\bar{z}w$	*	*					
$y\bar{z}w$		*				*	
$\bar{x}yz$			*	*			
$\bar{x}yz$					*		*

Із побудованої імплікантної таблиці випливає, що мінімальна форма містить усі імпліканти, крім $y\bar{z}w$, оскільки вони єдиним способом накривають усі стовпці імплікантної таблиці. Мінімальна ДНФ є

$$f=yw\vee\bar{x}\,\bar{z}w\vee\bar{x}yz\vee xzw;$$

б) мінімізація методом карт Карно функції

$$f=\overset{1}{\bar{x}\,\bar{z}w}\vee\overset{2}{\bar{x}yw}\vee\overset{3}{y\bar{z}w}\vee\overset{4}{\bar{x}yz}\vee\overset{5}{xzw}\vee\overset{6}{xyw}.$$

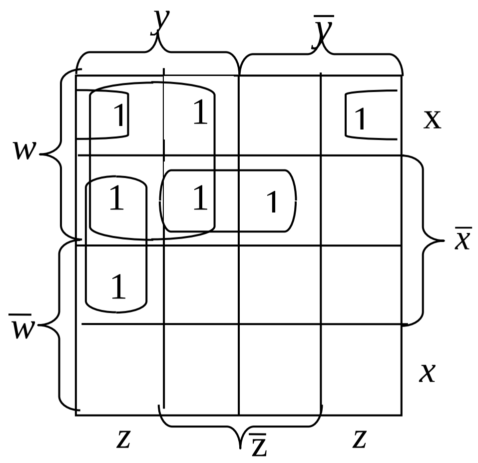


Рис.2.10.4.8

Покриття одиниць блоками показує, що мінімальна ДНФ

$f = yw \vee \bar{x}\,\bar{z}w \vee \bar{x}yz \vee xzw.$

2.11. Застосування алгебри висловлювань до синтезу й аналізу схем дискретної дії

2.11.1. Переключальні схеми в електротехніці

1. Серед автоматичних пристроїв розрізняють пристрої дискретної і пристрої безперервної дії.

Робота дискретних пристроїв, наприклад цифрових обчислювальних машин, характеризується переривчастою, стрибкоподібною зміною кінцевого числа станів; робота безперервних пристроїв, наприклад, моделюючих (аналогових) машин – плавною зміною станів.

Фізична природа пристрою визначається електротехнічними, механічними та іншими характеристиками його елементів. Функціональні ж характеристики цих елементів (враховують призначення кожного елемента, але не спосіб, за допомогою якого це призначення виконується) і спосіб їх сполуки утворюють у сукупності **логічну структуру** пристрою.

Під логічним синтезом схеми дискретного дії треба розуміти визначення логічної структури (формули) дискретного пристрою за заданими умовами його роботи, а під логічним аналізом – зворотну задачу, тобто визначення умов роботи пристрою за вже відомою її логічною структурою.

Надалі замість «логічний синтез (аналіз)» будемо говорити просто «синтез (аналіз)».

Розглянемо лише найпростіші випадки, коли елементи пристрою здатні мати тільки два стани, тобто працюють за принципом «так – ні» («замкнено – розімкнуто»), подібно до того як висловлювання здатні набувати лише два значення: «істинне» або «хибне».

Різноманітні вимикачі, перемикачі та кнопки, що оточують нас на виробництві та в побуті, є прикладами елементів типу «так – ні».

Глибока подібність між елементами цього типу та висловлюваннями, що складається в тому, що й перші, і другі можуть мати лише два стани, два значення, є основою для застосування алгебри висловлювань до синтезу й аналізу схем, складених з таких елементів.

Ідеї про можливість такого застосування висловлювались ще на початку XX століття. Однак точний доказ можливості і методика застосування алгебри висловлювань до синтезу й аналізу електричних ланцюгів уперше були розроблені в 30-х роках вченими В. І. Шестаковим та К Е. Шенноном.

Розглянемо нижче найпростіші контактні й безконтактні схеми, до синтезу та аналізу яких можна застосувати апарат алгебри висловлювань.

2. Елементи, з яких будуються контактні схеми, – електричні контакти з двома станами: «замкнуто», при якому контакт замикає ланцюг, пропускаючи через нього струм, і «розімкнуто», при якому ланцюг розмикається і струм через нього не проходить.

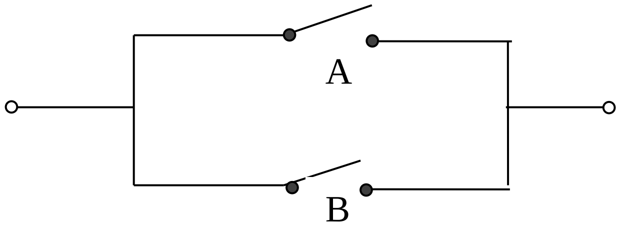


Рис.2.11.1

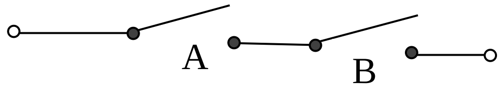


Рис.2.11.2

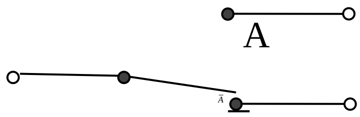


Рис.2.11.3

На малюнках контакти зображуються в неробочому стані.

1. Диз'юнкції $A \vee B$ ставиться у відповідність схема, що складається з паралельного з'єднання контактів A і B, замкнута тоді й тільки тоді, коли хоча б один із контактів A чи B замкнутий (рис.2.11.1).

2. Кон'юнкції $A \wedge B$ ставиться у відповідність схема, яка складається з послідовно з'єднаних контактів A і B, замкнута тоді йтільки тоді, коли обидва ці контакти замкнуті (рис. 2.11.2).

3. Запереченню A ставиться у відповідність контакт $\bar{A}$, який розмикає, та керований тим же елементом (реле, вимикачем), що й замикає контакт, тобто, такий контакт $\bar{A}$, який замкнутий, коли A розімкнутий, і розімкнений, коли A замкнутий (рис.2.11.3).

Оскільки кожна функція алгебри висловлювань може бути визначена в ДНФ або в КНФ, тобто за допомогою знаків $\wedge, \vee, \neg$ (кон'юнкції, диз'юнкції, заперечення), існує відповідність кожної функції алгебри висловлювань контактній схемі, складеній із замикаючих і розмикаючих контактів й за допомогою послідовних і паралельних з'єднань.

Кажуть, що будь-яка функція алгебри висловлювання може бути реалізована за допомогою релейно-контактної схеми.

Очевидно, і кожній релейно-контактній схемі відповідає функція, визначена формулою, складеною зі змінних та їх заперечень за допомогою знаків диз'юнкції і кон'юнкції. Ця формула називається структурною формулою схеми.

Встановлена відповідність є основою застосування апарату алгебри висловлювань до аналізу, спрощення і синтезу контактних схем.

Аналіз схеми, тобто визначення умов роботи (замикання і розмикання) даної схеми, зводиться до визначення значень відповідної цій схемі структурної формули при всіляких наборах значень змінних.

Спрощення вказаної схеми зводиться до спрощення її структурної формули.

Синтез схеми за заданими умовами її роботи зводиться до складання структурної формули за цими умовами переведеними у таблицю, і конструюванні схеми, відповідної цій формулі.

Наведемо приклади на аналіз, спрощення і синтез контактних схем.

Завдання 1. Провести аналіз і, якщо можливо (!), спрощення схеми, зображеної на рис.2.11.4.

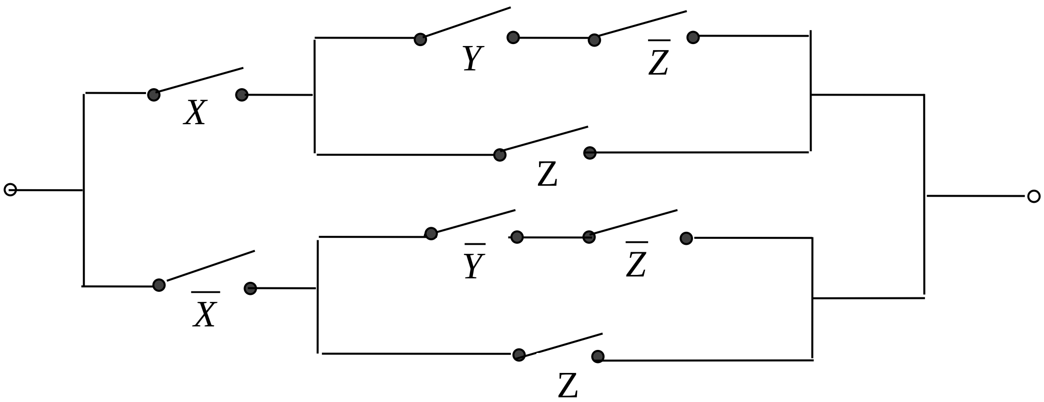


Рис.2.11.4

За даною схемою легко записати її структурну формулу:

$$f(X,Y,Z) = X\left(Y\overline{Z} \vee Z\right) \vee \overline{X}\left(\overline{Y}\overline{Z} \vee Z\right).$$

Спростимо цю формулу, а потім зробимо аналіз спрощеної схеми (еквівалентної даної по відношенню до проходження струму щодо станів контактів):

$$X\left(Y\overline{Z} \vee Z\right) \vee \overline{X}\left(\overline{Y}\overline{Z} \vee Z\right) = X\left(Y \vee Z\right) \vee \overline{X}\left(\overline{Y} \vee Z\right) =$$

$$= XY \vee XZ \vee \overline{X}\overline{Y} \vee \overline{X}Z = XY \vee \overline{X}\overline{Y} \vee Z\,.$$

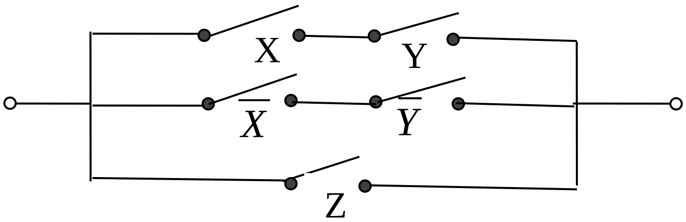


Рис.2.11.5

Спрощена схема зображена на рис.2.11.5. Умови замикання і розмикання схеми можна помітити і без створення таблиці: схема замкнута, якщо:

1) замкнуті обидва контакти X та У, або

2) розімкнуті обидва контакти X та У, або

3) замкнутий контакт Z;

схема розімкнута, якщо розімкнуті контакт Z, і один з контактів X або У замкнутий, а інший розімкнути.

Приклад синтезу схеми

Із трьох контактів A, B, C скласти схему з одним входом і одним виходом так, щоб на виході з'являвся сигнал (спалахувала лампочка), якщо хоча б два з трьох контактів A, B, C замкнуті.

За заданими умовами роботи схеми можемо скласти таблицю значень відповідної функції (A, B, C):

Таблиця 2.11.1

A	B	C	$f(A,B,C)$
1	1	1	1
1	1	0	1
1	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	0

Виходячи з табличного завдання функції, можемо записати її СДНФ: $f\left(A,B,C\right)=ABC+\overline{A}BC+A\overline{B}C+AB\overline{C}$.

У попередньому розділі вже знайдено мінімальну диз'юнктивну форму цієї функції: $f\left(A,B,C\right)=BC+AC+AB$.

Зауважимо, однак, що мінімальна диз'юнктивна нормальна форма може і не бути мінімальною серед усіляких форм даної функції. Так, в нашому випадку можна ще зменшити число букв на одну $f\left(A,B,C\right)=BC+A(B+C)$. Отримуємо таку схему (Рис. 2.11.6).

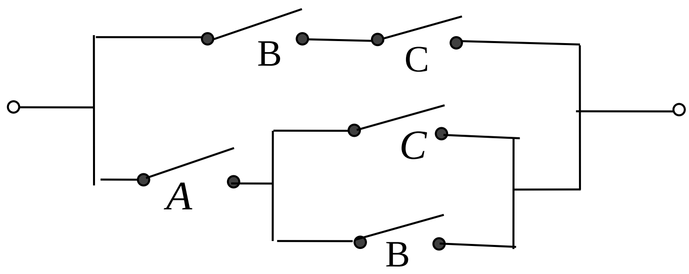


Рис.2.11.6

2.11.2. Реалізація булевих функцій схемами з функціональних елементів

Величезні швидкості роботи сучасних електронних обчислювальних машин досягнуті за рахунок застосування безконтактних схем, що працюють в тисячі разів швидше, ніж відповідні релейно-контактні схеми. У цих схемах застосовуються електронні лампи (діоди, тріоди, пентоди) або напівпровідникові прилади, які реалізують основні логічні операції (заперечення, диз'юнкцію і кон'юнкцію).

Розглядатимемо функціональні елементи, зображені на рис.2.11.7, які реалізують відповідно булеві функції заперечення, кон'юнкцію та диз'юнкцію.

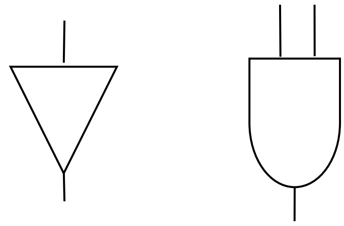


Рис.2.11.7

1. Елемент, який реалізує заперечення, має один вхід і один вихід; сигнал з’являється на виході, коли на вході немає сигналу, і не з’являється сигнал, коли на вхід поданий сигнал.
2. Елемент, який реалізує кон’юнкцію, має два або більше входів і один вихід; сигнал з’являється на виході тоді й тільки тоді, коли на всі входи подано сигнали.
3. Елемент, який реалізує диз’юнкцію, має два або більше входів і один вихід; сигнал з’являється на виході тоді й тільки тоді, коли сигнал поданий хоча б на один з входів.

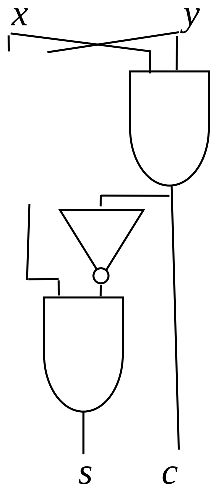
2.11.3. Півсуматори, повні суматори

Покажемо, як схеми з функціональних елементів можна використовувати для додавання двох додатних чисел, заданих у двійковій системі числення. Спочатку побудуємо схему, яка обчислює $x + y$, де x та y – біти. Входи схеми – x та y; на кожний з них може бути поданий сигнал 0 або 1. Наша конструкція буде об’єднанням двох схем (матиме два виходи). Вихід ***s*** дає суму бітів у даному розряді, вихід ***c*** використано для біта перенесення в наступний розряд.

Табл. 2.11.2

Вхід		Вихід	
x	y	S	C
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

У табл. 2.11.2 наведені значення на входах і виходах схеми, яку називають **півсуматором**. Саму схему наведено на рис.2.11.8. Зазначимо, що з табл. 2.11.2 маємо $c = xy,\ s = x\overline{y} \vee \overline{x}y = (x \vee y)\overline{xy}$.



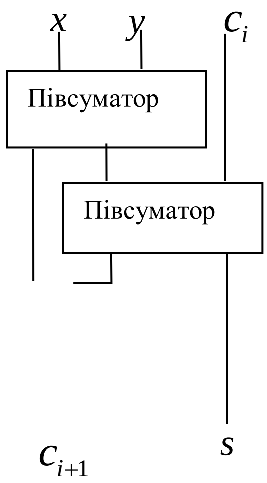


Рис. 2.11.8 Рис. 2.11.9

Щоб урахувати біт перенесення *c*, використовують схему (рис.2.11.9), яку називають **повним суматором**. Її входи – *x, y* і біт перенесення з попереднього розряду c_i. Виходів два: сума s у даному розряді та нове перенесення c_{i+1} (у наступний розряд). Відповідні булеві функції задано в таблиці. 2.11.3.

Таблиця 2.11.3

Вхід			Вихід	
x	y	c_i	s	c_{i+1}
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

Нарешті, на рис.2.11.10 показано, як повні суматори та півсуматор можна використати для додавання трирозрядних цілих чисел $x_3x_2x_1$ та $y_3y_2y_1$ у двійковій системі числення. Результат – двійкове число $s_4s_3s_2s_1$. Зазначимо, що s_4 (старший розряд суми) збігається з c_3.

Аналогічно будують схему для додавання n-розрядних двійкових чисел: $x_nx_{n-1}...x_1$ та $y_ny_{n-1}...y_1$.

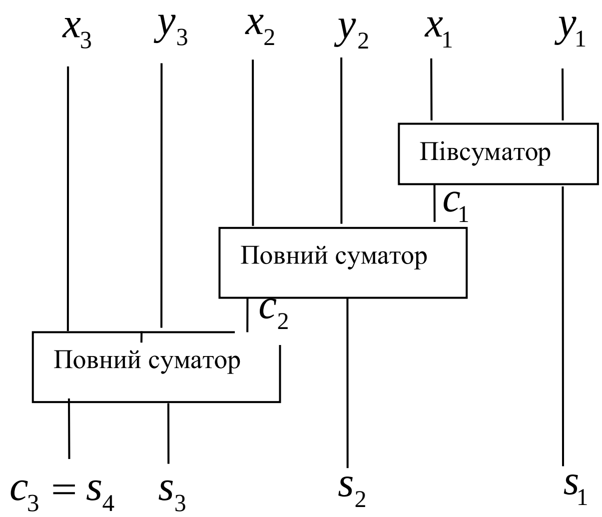


Рис.2.11.10

Приклад 2.11.3.1. Побудувати схему з функціональних елементів кон'юнкції, диз'юнкції, заперечення, які реалізують функції 1) $xy \vee xz \vee yz$; 2) $\overline{x \vee \bar{y}z}$; 3) $x\bar{y}z \wedge xy\bar{z} \vee \bar{x}yz$.

1) Перший крок у конструюванні логічної схеми це формування диз'юнкції з трьома входами (див. рис. 2.11.11):

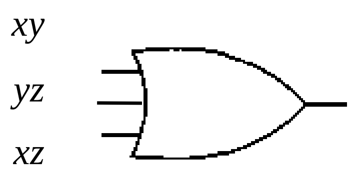


Рис.2.11.11

Другий крок:

1) $xy \vee xz \vee yz$. Логічна схема на рис.2.11.12.

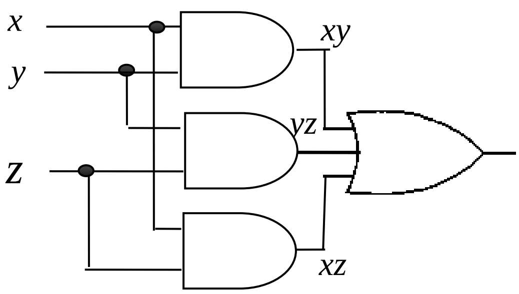


Рис.2.11.12

2) $\overline{x \vee \overline{y}z} = \overline{x}(y \vee \overline{z})$. Логічна схема на рис.2.11.13.

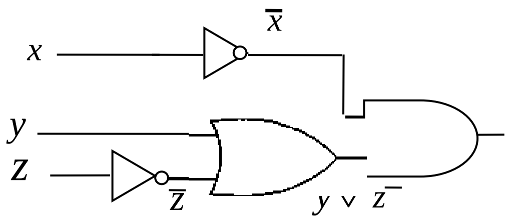


Рис.2.11.13

3) $x\overline{y}z \wedge xy\overline{z} \vee \overline{x}yz$. Логічна схема на рис.2.11.14.

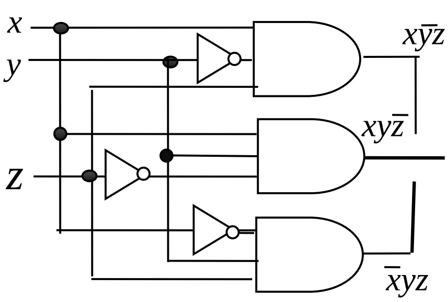


Рис.2.11.14

Завдання для практичних занять

1. Які з таких виразів є висловлюваннями і чому:

а) $3>5$;

б) Я живу на Україні;

в) Учні середньої школи вивчають інформатику;

г) $y^2+a>0$ при $a>0$; д) $Y<0$;

е) $2+2=4$; ж) $(5+a)^2>0$.

2. Визначте вид складного висловлювання та запишіть його формулою логіки висловлювань:

а) «Не купуй кота в мішку, якщо тобі не потрібний мішок»;

б) «Прямо – ближче, обдумано – швидше»;

в) «Якщо я маю намір поїхати в село тоді й тільки тоді, коли я складу іспит, то якщо я не складу іспит, то я залишуся у місті».

3. Сформулюйте заперечення таких висловлювань у стверджувальній формі, тобто так, щоб вони не починалися зі слів «неправильно, що …»:

а) «Якщо я займаюся в спортивній школі, то я вмію плавати»;

б) «Якщо Париж розташований на Сені, то білі ведмеді живуть в Африці»;

в) «Якщо в даному чотирикутнику діагоналі взаємно перпендикулярні, то цей чотирикутник – ромб».

4. Які з таких імплікацій істинні та чому:

а) Якщо $2+2=4$, то $3>2$; б) Якщо $2+2=4$, то $2>3$;

в) Якщо $2+2=5$, то існують чорти; г) Якщо $2+2=5$, то $2<3$.

5. У таких реченнях замініть крапки словами «необхідно та достатньо», «необхідно, але не достатньо», «достатньо, але не необхідно» так, щоб вийшло правильне твердження:

А. Для того, щоб виграти в лотерею ... мати хоча б один лотерейний квиток;

Б. Для того, щоб із трьох чисел a, b, c хоча б два були рівні між собою, …, щоб $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$;

В. Для того, щоб медіана трикутника дорівнювала половині сторони, яку вона ділить, ..., щоб трикутник був прямокутним.

6. Складіть таблиці істинності для таких висловлювань:

а) $(p\vee q)\vee(1\wedge r)$; г) $p\Rightarrow(q\Rightarrow r)$;

б) $(p\Leftrightarrow q)\Rightarrow(p\vee r)$; д) $(p\Rightarrow q)\Leftrightarrow(\overline{p}\vee r)$.

в) $(p\Leftrightarrow q)\Rightarrow(\overline{q}\vee r)$;

7. На іспиті викладач пропонує студентові п’ять тверджень, на які потрібно відповісти, істинні вони чи хибні. Студент знає, що викладач завжди дає істинних тверджень більше, ніж хибних, і ніколи не задає три питання поспіль, що вимагають однакової відповіді. Зі змісту першого й останнього твердження йому ясно, що відповіді на них повинні бути протилежними. Єдине питання, відповідь на яке він знає, – друге. Це вже гарантує йому правильні відповіді на всі питання. Що знає студент про друге питання? Якими повинні бути відповіді на всі 5 питань?

8. Задача Р. Смалліана про конгресменів. У деякому конгресі засідають 100 політичних діячів. Кожен із них або продажний, або чесний. Відомі такі два факти:

1) принаймні один із конгресменів чесний;

2) із кожної довільно обраної пари конгресменів принаймні один продажний.

Чи можна за допомогою цих двох тверджень визначити, скільки конгресменів у цьому конгресі будуть чесними, а скільки – продажними? (Дві розповсюджені відповіді 50 і 50 або 51 і 49 – не є правильними).

9. Метод математичної індукції.

а) довести, що для будь-яких цілих n число n^2+n парне;

б) довести, що для будь-яких натуральних n вираз $5\cdot 2^{3n-2}+3^{3n-1}$ ділиться на 19;

в) довести, що для будь-яких натуральних n справедлива рівність

1) $1\cdot 2+2\cdot 3+...+(n-1)n=\dfrac{(n-1)n(n+1)}{3}$;

2) $\dfrac{1}{1\cdot 4}+\dfrac{1}{4\cdot 7}+...+\dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\dfrac{n}{3n+1}$;

г) довести нерівність Бернуллі: для будь-якого натурального n, для кожного $h>-1$ виконується нерівність $\left(1+h\right)^{n}\geq 1+nh$.

10. Запишіть такі висловлювання з використанням кванторів:

а) існує число x таке, що $x+1=5$;

б) будь-яке число або додатне, або від’ємне, або дорівнює нулю;

в) усі тигри більші за кішок;

г) деякі студенти не брали участі в олімпіаді.

11.У наданих висловлюваннях заповніть пропуски необхідними кванторами:

а) для двох різних точок … пряма, що проходить через них;

б) на … прямій … дві різні точки;

в) із будь-якого становища … вихід.

Булеві функції

1. Довести рівносильність наведених нижче формул F та G. Використати таблиці та тотожні перетворення.

а) $F=\overline{x}\,\overline{z}\vee xy\vee x\overline{z},\ G=xyz\vee\overline{z}$;

б) $F=(x\rightarrow y)\rightarrow(x\overline{y}\oplus(x\,\square\,\overline{y})),\ G=(x\vee y)(\overline{x}\vee\overline{y})$;

в) $F=xy\oplus xz\oplus\vee yz,\ G=xy\overline{z}\vee xz\vee yz$;

2. За принципом двоїстості побудувати формулу, яка реалізує функцію, двоїсту до f:

а) $F=xy\vee yz\vee xt\vee zt$; б) $F=x\vee y(zt\vee 0)\vee\overline{x}yt$;

в) $f=(\bar{x}\vee y)\oplus((x\downarrow y)!(\bar{x}\,\square\,yz))$.

3. Перейти від заданої ДНФ до ДДНФ:

а) $f(\tilde{x}^3)=x_1\vee\bar{x}_2x_3$; б) $f(\tilde{x}^3)=x_1\bar{x}_2\vee\bar{x}_1x_3$;

в) $f(\tilde{x}^3)=x_1\vee\bar{x}_1x_2\vee\bar{x}_2x_3$; г) $f(\tilde{x}^3)=\bar{x}_1x_2\vee\bar{x}_2x_3\vee\bar{x}_1\bar{x}_3$.

4. За допомогою тотожних перетворень побудувати ДДНФ:

а) $f(\tilde{x}^3)=(x_1\vee x_2\bar{x}_3)(x_1\vee x_3)$;

б) $f(\tilde{x}^3)=(x_1\vee\overline{x_2x_3})(x_1x_2\vee\overline{x_1x_3})$;

в) $f(\tilde{x}^4)=(x_1\vee x_2)x_3x_4\vee\overline{x_1x_4}$.

5. Перетворити ДНФ задачі 3 на КНФ.

6. Побудувати ДКНФ для функцій задачі 5.

Мінімізація булевих функцій

Для кожної з наведених нижче функцій знайти мінімальні ДНФ методом Квайна та методом карт Карно:

1) $\bar{x}yz\vee\bar{x}\,\bar{y}z$.

2) $xyz\vee xy\bar{z}\vee\bar{x}yz\vee\bar{x}y\bar{z}$.

3) $xy\bar{z}\vee x\bar{y}z\vee x\bar{y}\,\bar{z}\vee\bar{x}yz\vee xy\bar{z}$.

4) $xyz\vee x\bar{y}z\vee x\bar{y}\,\bar{z}\vee\bar{x}yz\vee\bar{x}y\bar{z}\vee\bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z}$.

5) $N_f=\{(000), (001), (011), (100), (111)\}$.

6) $N_f=\{(001), (011), (101), (110)\}$.

7) $N_f=\{(001), (011), (100), (110)\}$.

8) $N_f=\{(000), (010), (011), (100)\}$.

9) $N_f=\{(0011), (0110), (0111), (1001),(1010),(1011),(1111)\}$.

10) $N_f=\{(0011), (0110), (0111), (1001),(1010),(1011),(1111)\}$.

Індивідуальні завдання:

Завдання № 1.

Варіант № 1

Встановіть, істинні чи хибні такі висловлювання:

1. При діленні 42 на 5 залишається остача 3.
2. $\frac{1}{2} < \frac{1}{3}$.
3. У будь-якому прямокутнику діагоналі рівні.
4. $5\frac{1}{2} \geq \frac{14}{3}$.

Варіант № 2

Переведіть на мову формул логіки такі висловлювання:

1. Якщо завтра буде холодно, я одягну тепле пальто, якщо рукав буде полагоджений.
2. Завтра буде холодно, а рукав не буде полагоджений, значить, я не одягну тепле пальто.
3. Завтра буде холодно, я не одягну тепле пальто та змерзну.
4. Я не одягну тепле пальто і захворію.

Варіант № 3

Встановіть, істинні чи хибні такі висловлювання:

1. Число 102 парне і ділиться на 9.
2. $343\frac{1}{3} > \frac{1029}{3} < \frac{687}{2}$.
3. Число 102 парне або ділиться на 3.
4. $34 \cdot 2 - 17 = 51$.

Варіант № 4

Встановіть, істинні чи хибні такі висловлювання:

1. Будь-яке число 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 є розв’язанням нерівності $x + 2 > x$.

2. Сума будь-яких двох послідовних натуральних чисел є непарним числом.

3. Сума будь-яких трьох послідовних натуральних чисел ділиться на 3.

4. Будь-який прямокутник є квадратом.

Варіант № 5

Серед таких тверджень вкажіть висловлювання:

1. $x^2 - 5x + 4 = 0$.
2. $2x - 3 < 7$.
3. $2 \cdot 4 - 3 < 7$.
4. Будь-яке число є розв'язанням нерівності $2x - 3 < 7$.

Варіант № 6

Встановіть, істинні чи хибні такі висловлювання:

1. Існують натуральні числа, що кратні трьом.
2. Існують прямокутні рівносторонні трикутники.
3. Деякі непарні числа діляться на 9.
4. У будь-якому прямокутному трикутнику діагоналі рівні.

Варіант № 7

Встановіть, істинні чи хибні такі висловлювання:

1. Будь-яке непарне число ділиться на 2.
2. Існують парні числа, кратні 7.
3. Всі прямокутники є багатокутниками.
4. Всі однозначні натуральні числа є розв'язаннями

$$2(x+3) = 6 + 2x.$$

Варіант № 8

Переведіть на мову формул логіки такі висловлювання:

1. Джон або перевтомився, або хворий.
2. Якщо він перевтомився, то його все дратує.
3. Його все не дратує, виходить, він хворий.

4. Джон не перевтомився, а захворів.

Варіант № 9

Встановіть, істинні чи хибні такі висловлювання:

1. Будь-який квадрат є паралелограмом.
2. Будь-який ромб є квадратом.
3. У будь-якому ромбі діагоналі в точці перетину діляться навпіл.
4. Діагоналі ділять кути ромба навпіл.

Варіант № 10

Переведіть на мову формул логіки такі твердження:

1. Не всі птахи можуть літати.
2. Якщо хтось може це зробити, то і я зможу це зробити.
3. Не всі люди щирі й не всі щирі люди добрі.
4. Або кожний любить кого-небудь і жоден не любить всіх, або хтось любить всіх і хтось не любить нікого.

Варіант № 11

Встановіть, істинні чи хибні такі висловлювання:

1. Протилежні кути паралелограма становлять у сумі 180^0.
2. Діагоналі чотирикутника взаємно перпендикулярні.
3. У довільного чотирикутника сума внутрішніх кутів дорівнює 360^0.
4. У трапеції всі протилежні сторони рівні.

Варіант № 12

Переведіть на мову формул логіки такі висловлювання:

1. Якщо я поїду автобусом, а автобус запізниться, то я пропущу важливу ділову зустріч.
2. Якщо я пропущу важливу ділову зустріч і засмучуся, то мені не варто їхати додому.
3. Якщо я не одержу цієї роботи, то засмучуся і мені варто поїхати додому.

4. Якщо я поїду автобусом, і автобус спізниться, то я не одержу цю роботу.

Варіант № 13

Встановіть, істинні чи хибні такі висловлювання:

1. Хоча б одне із чисел першого десятка складене.
2. Добуток будь-яких двох послідовних натуральних чисел – парне число.
3. У будь-якого чотирикутника діагоналі рівні.
4. Деякі непарні числа діляться на 4.

Варіант № 14

Переведіть на мову формул логіки такі висловлювання:

1. Я піду додому або залишуся тут і послухаю музику.
2. Я не піду додому.
3. Я залишуся тут і послухаю музику.
4. Я піду додому або послухаю музику.

Варіант № 15

Встановіть, істинні чи хибні такі висловлювання:

1. Число 6 ділиться на 2 і на 3.
2. Число 123 ділиться на 3 і на 9.
3. $\frac{2}{3} < \frac{1}{2} < \frac{1}{4}$.
4. Один з кутів правильного трикутника дорівнює 60^0.

Варіант № 16

Встановіть, істинні чи хибні такі висловлювання:

1. Кожне парне натуральне число, що більше 4, але менше 20, можна представити у вигляді суми двох простих чисел.
2. Всі натуральні числа діляться на 3.
3. Всі натуральні числа не діляться на 3.
4. Деякі непарні числа діляться на 6.

Варіант № 17

Переведіть на мову формул логіки такі висловлювання:

1. Йде сніг, але немає вітру.
2. Сніг іде тоді і тільки тоді, коли є вітер.
3. Неправильно, що йде сніг або немає вітру.
4. Сніг не йде, і немає вітру.

Варіант № 18

Побудуйте заперечення таких висловлювань:

1. Число 132 ділиться на 9.
2. 5<4.
3. 3,2 – натуральне число.
4. Прямокутний трикутник є правильним.

Варіант № 19

Переведіть на мову формул логіки такі висловлювання:

1. Якщо 6 ділиться на 2, то 6 – складене число.
2. Якщо 6 - складене число, то 12 – складене число.
3. Якщо 12 – складене число, то існує просте число, більше, ніж 12.
4. Якщо існує просте число, більше, ніж 12, то існує складене число, більше, ніж 12.

Варіант № 20

Переведіть на мову формул логіки такі висловлювання:

1. Заробітна плата зросте.
2. Заробітна плата зросте, якщо буде інфляція.
3. Не буде інфляції.
4. Якщо буде інфляція, то збільшиться вартість життя.

Завдання № 2.

1. Побудуйте таблиці істинності для таких висловлювань:

1	$p \wedge (\overline{q} \wedge r)$	2	$(\overline{p} \wedge \overline{q}) \wedge r$
3	$\overline{p} \wedge (\overline{q} \wedge \overline{r})$	4	$(p \wedge q) \wedge r$
5	$p \vee (\overline{q} \wedge r)$	6	$(p \vee \overline{q}) \wedge \overline{r}$
7	$(\overline{p} \vee \overline{q}) \wedge \overline{r}$	8	$p \vee (q \wedge r)$
9	$(p \wedge \overline{q}) \vee \overline{r}$	10	$p \wedge (q \vee \overline{r})$
11	$(p \wedge q) \vee r$	12	$\overline{p} \wedge (\overline{q} \vee \overline{r})$
13	$(p \vee \overline{q}) \vee \overline{r}$	14	$\overline{p} \vee (\overline{q} \vee \overline{r})$
15	$(p \vee q) \vee \overline{r}$	16	$p \vee (q \vee r)$
17	$(p \vee q) \wedge \overline{r}$	18	$p \vee (q \wedge r)$
19	$(\overline{p} \vee q) \wedge \overline{r}$	20	$\overline{p} \vee (\overline{q} \wedge \overline{r})$

2. Побудуйте таблиці істинності для таких висловлювань:

1	$p \Rightarrow (\overline{\overline{q}} \Rightarrow \overline{r})$	2	$(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow (q \vee r)$
3	$p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$	4	$(\overline{p} \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow r)$
5	$p \Rightarrow (\overline{q} \Rightarrow \overline{r})$	6	$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (q \Rightarrow r)$
7	$(p \Leftrightarrow \overline{q}) \Leftrightarrow \overline{r}$	8	$(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow (q \wedge r)$
9	$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow r$	10	$(p \vee q) \Leftrightarrow (q \wedge r)$
11	$p \Rightarrow (q \Leftrightarrow r)$	12	$(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow (\overline{q} \vee r)$
13	$p \Leftrightarrow (q \vee r)$	14	$(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow (\overline{p} \vee r)$
15	$\overline{(\overline{p} \Rightarrow q)} \vee r$	16	$(\overline{p} \wedge q) \Leftrightarrow (p \vee q)$
17	$\overline{p} \vee \overline{(q \Rightarrow r)}$	18	$\overline{(\overline{p} \Rightarrow q)} \vee \overline{(\overline{p} \Rightarrow r)}$
19	$\overline{(\overline{p} \Leftrightarrow q)} \wedge r$	20	$\overline{(\overline{p} \Rightarrow q) \vee (\overline{p} \Rightarrow r)}$

Завдання № 3.

Варіант № 1

1. Довести, що при будь-якому натуральному n число $a_n = n^3 + 3n^2 + 5n$ ділиться на 3.

2. Довести, що при будь-якому натуральному n справедлива рівність $(n+1)(n+2)\cdot\ldots\cdot(n+n) = 2^n \cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)$.

Варіант № 2

1. Довести, що при будь-якому натуральному n число $a_n = n^3 + 5n$ ділиться на 6.

2. Довести, що при будь-якому натуральному n справедлива рівність $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Варіант № 3

1. Довести, що при будь-якому натуральному n число $a_n = n^5 - n$ ділиться на 30.

2. Довести, що при будь-якому натуральному n справедлива рівність $1+3+5+\ldots+(2n-1) = n^2$.

Варіант № 4

1. Довести, що при будь-якому натуральному n число $a_n = 5^{n+3} + 11^{3n+1}$ ділиться на 17.

2. Довести, що

$$\sin\alpha + \sin 2\alpha + \ldots + \sin n\alpha = \frac{\sin\dfrac{n\alpha}{2}\cdot\sin\dfrac{(n+1)\alpha}{2}}{\sin\dfrac{\alpha}{2}}$$

для будь-якого натурального n при умові що $\dfrac{\sin\alpha}{2} \neq 0$.

Варіант № 5

1. Довести, що при будь-якому натуральному n число $a_n = 11^{n+2} + 12^{2n+1}$ ділиться на 133.

2. Довести, що при будь-якому натуральному n $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + ... + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$.

Варіант № 6

1. Довести, що при будь-якому натуральному n число $a_n = 7^{2n} - 4^{2n}$ ділиться на 33.

2. Довести, що для будь-якого натурального n виконується рівність

$$\cos\alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \cos 4\alpha \cdot ... \cdot \cos 2^n \alpha = \frac{\sin 2^{n+1}\alpha}{2^{n+1}\sin\alpha}.$$

Варіант № 7

1. Довести, що при будь-якому натуральному n число $a_n = 6^{2n} + 19^n - 2^{n+1}$ ділиться на 17.

2. Довести, що $\frac{1}{2} + \cos\alpha + \cos 2\alpha + ... + \cos n\alpha = \dfrac{\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$

для будь-якого натурального n при умові що $\frac{\sin\alpha}{2} \neq 0$.

Варіант № 8

1. Довести, що при будь-якому натуральному n число $a_n = 6^{2n} + 3^{n+2} + 3^n$ ділиться на 11.

2. Довести, що при будь-якому натуральному n справедлива рівність $1\cdot 4 + 2\cdot 7 + 3\cdot 10 + ... + n(3n+1) = n(n+1)^2$.

Варіант № 9

1. Довести, що при будь-якому натуральному n число $a_n = 7 \cdot 5^{2n} + 12 \cdot 6^n$ ділиться на 19.

2. Довести, що при будь-якому натуральному n справедлива рівність

$$1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \ldots + n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}.$$

Варіант № 10

1. Довести, що при будь-якому натуральному n число $a_n = 5^{2n+1} + 3^{n+2} 2^{n-1}$ ділиться на 19.

2. Довести, що при будь-якому натуральному n справедлива рівність $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right).$

Варіант № 11

1. Довести, що при будь-якому натуральному n число $a_n = 5^{2+n} + 26 \cdot 5^n + 8^{2n+1}$ ділиться на 59.

2. Довести, що при будь-якому натуральному n справедлива рівність $\frac{1^2}{1 \cdot 3} + \frac{2^2}{3 \cdot 5} + \ldots + \frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}.$

Варіант № 12

1. Довести, що при будь-якому натуральному n число $a_n = 5^{n+3} 2^n - 125$ ділиться на 45.

2. Довести, що при будь-якому натуральному n справедлива рівність

$$1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3^2 + \ldots + (n-1) \cdot n^2 = \frac{n(n^2-1)(3n+2)}{12}.$$

Варіант № 13

1. Довести, що при будь-якому натуральному n число $a_n = 2n^3 + 3n^2 + 7n$ ділиться на 6.

2. Довести, що при будь-якому натуральному n справедлива

рівність $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + ... + (-1)^{n-1} \cdot n^2 = (-1)^{n-1} \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Варіант № 14

1. Довести, що при будь-якому натуральному n число $a_n = n^2(n^4 - 1)$ ділиться на 30.

2. Довести, що при будь-якому натуральному n справедлива рівність
$$1 + 3 + 6 + 10 + ... + \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

Варіант № 15

1. Довести, що при будь-якому натуральному n число $a_n = 11^{6n+3} + 1$ ділиться на 148.

2. Довести, що при будь-якому натуральному n справедлива рівність
$$2 + 7 + 14 + ... + \left(n^2 + 2n - 1\right) = \frac{n(2n^2 + 9n + 1)}{6}.$$

Варіант № 16

1. Довести, що при будь-якому натуральному n число $a_n = 10^n + 18n - 28$ ділиться на 27.

2.Довести, що при будь-якому натуральному n справедлива рівність
$$\frac{7}{1 \cdot 8} + \frac{7}{8 \cdot 15} + ... + \frac{7}{(7n-6)(7n+1)} + \frac{1}{7n+1} = 1 \cdot$$

Варіант № 17

1. Довести, що при будь-якому натуральному n число $a_n = 7^{2n} - 1$ ділиться на 48.

2. Довести, що при будь-якому натуральному n справедлива рівність
$$\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right)...\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) = \frac{n+2}{2n+2}.$$

Варіант № 18

1. Довести, що при будь-якому натуральному n число $a_n = (n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3$ ділиться на 9.

2. Довести, що при будь-якому натуральному n справедлива рівність

$$1+\frac{3}{2}+\frac{7}{4}+\frac{15}{8}+\ldots+\frac{2^n-1}{2^{n-1}}=2^{1-n}+2(n-1).$$

Варіант № 19

1. Довести, що при будь-якому натуральному n число $a_n=n^3+11n$ ділиться на 6.

2. Довести, що при будь-якому натуральному n справедлива рівність

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}\ldots+\frac{n}{2^n}=2-\frac{n+2}{2^n}.$$

Варіант № 20

1. Довести, що при будь-якому натуральному n число $a_n=7^n-1$ ділиться на 6.

2. Довести, що при будь-якому натуральному n справедлива рівність

$$\frac{1}{1\cdot3\cdot5}+\frac{2}{3\cdot5\cdot7}+\frac{3}{5\cdot7\cdot9}+\ldots+\frac{n}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}=\frac{n(n+1)}{2(2n+1)(2n+3)}.$$

Завдання № 4

Запишіть висловлювання за допомогою кванторів та математичних формул, з'ясуйте, хибні вони чи істинні.

1. Для будь-якого цілого x існує цілий y, такий, що їх сума дорівнює шести.

2. Сума будь-якого дійсного числа та нуля дорівнює цьому числу.

3. Будь-яке натуральне число більше за нуль.

4. Для будь-якого цілого x виконується нерівність: x у квадраті менше за нуль.

5. Для будь-якої прямої b на площині P існує єдина пряма a, яка перетинається з прямою b.

6. Існує єдине ціле x, для якого виконується: x у квадраті дорівнює

чотири.

7. Якщо x менше за y, то існує дійсне число z, таке, що x менше за z.

8. Для будь-яких дійсних x та y виконується нерівність: сума квадратів x та y менша за нуль.

9. Для будь-якого натурального x існує єдине ціле y, таке, що різниця x та одиниці дорівнює y.

10. Для будь-якої прямої b на площині P існує єдина пряма a, яка перпендикулярна прямій b.

11. Існує єдине натуральне число, квадрат якого дорівнює дев'яти.

12. Для будь-якої прямої b на площині P існує пряма a, яка паралельна прямій b.

13. Будь-яке натуральне число або парне, або непарне.

14. Для будь-якого дійсного x існує натуральне y, таке, що x більший за y.

15. Для будь-яких дійсних a та b існує дійсне c, таке, що $a \cdot b = c$.

16. Не існує дійсного числа, такого, що його сума з одиницею дорівнювала б цьому числу.

17. Для будь-якого з натуральних чисел a та b існує натуральне число c, таке, що сума a та b дорівнює c.

18. Добуток будь-якого натурального числа та одиниці дорівнює одиниці.

19. Для будь-яких дійсних чисел a та b від зміни місць доданків сума не змінюється.

20. Для будь-якої площини P_1 у просторі існує паралельна їй площина P_2.

Завдання 5.

Довести рівносильності за допомогою тотожних перетворень:

1) $xy \leftrightarrow (x \to z) \equiv x(y \leftrightarrow z);$

2) $(x \to y) \to (x \vee z) \equiv x \vee y \vee z;$

3) $(x \vee y) \leftrightarrow (x \to z) \equiv (x \vee y)(x \to z);$

4) $(x \to y) \vee (x \leftrightarrow z) \equiv x \to y \vee z;$

5) $xz \leftrightarrow yz \equiv z \to (x \leftrightarrow y);$

6) $x \leftrightarrow (x \vee y)(x \vee z) \equiv (xy \vee z)(xz \vee y) \to x;$

7) $(x \leftrightarrow y \leftrightarrow z)((x \leftrightarrow y) \vee z) \equiv xyz;$

8) $(x \vee y)z \leftrightarrow \overline{z} \equiv x \vee y \to z;$

9) $(x \leftrightarrow y)(x \to z)(z \to y) \equiv (x \leftrightarrow z)(x \to y)(y \to z);$

10) $(x \leftrightarrow y)(y \to (x \leftrightarrow \overline{z})) \equiv \overline{x}\,\overline{y} \vee \overline{z})(x \leftrightarrow y);$

11) $\overline{x} \leftrightarrow (y \to xz) \equiv (x \leftrightarrow y)\overline{(xyz)};$

12) $\overline{x}(z \to (x \leftrightarrow \overline{y})) \equiv \overline{x}(y \vee (x \to z));$

13) $(x \to z)(y \leftrightarrow z) \equiv ((x \leftrightarrow y) \vee z)(y \leftrightarrow z);$

14) $\overline{x}((x \leftrightarrow y) \to z) \equiv \tilde{x}((y \leftrightarrow z) \to yz);$

15) $(x \to y \vee z)(y \to x \vee z) \equiv (x \leftrightarrow y) \vee xy \vee z;$

16) $(xz \leftrightarrow zy) \equiv (xz \to y)(yz \to x);$

17) $x \vee y \vee z \leftrightarrow xyz \equiv x \vee y \vee z \to xyz;$

18) $\overline{x}(xy \leftrightarrow yz) \equiv \overline{x}(z \to (x \leftrightarrow y);$

19) $(x \leftrightarrow y) \vee yz \equiv (\overline{x} \leftrightarrow y)\overline{z} \vee (x \vee y)z;$

20) $((x \leftrightarrow y) \to z) \to x \equiv (y \vee z) \to x.$

Завдання 6

Для кожної з наведених нижче функцій методом еквівалентних перетворень побудувати ДДНФ. Провести їх мінімізацію:

а) методом Квайна;

б) методом карт Карно.

1) $f = (x \square y) \vee z \rightarrow x$;

2) $f = x \square y \vee z \rightarrow y$;

3) $f = x \square y \rightarrow z \vee x$;

4) $f = (x \square y) \rightarrow z \vee y$;

5) $f = (x \rightarrow y) \square z \wedge y$;

6) $f = (x \square y) \wedge z \rightarrow x$;

7) $f = z \vee \overline{x} \rightarrow y \square z$;

8) $f = (x \square y) \rightarrow z \vee x$;

9) $f = (x \square y) \wedge z \rightarrow \overline{y}$;

10) $f = (x \square y) \vee \overline{x} \rightarrow z$;

11) $f = x \square y \square z \vee \overline{x}$;

12) $f = (\overline{x} \square y) \wedge (x \square \overline{z})$;

13) $f = (z \vee \overline{x}) \rightarrow (z \rightarrow y)$;

14) $f = x \square y \rightarrow z \vee \overline{x}$;

15) $f = x \rightarrow y \wedge z \square x$;

16) $f = (x \square y) \wedge (\overline{x} \rightarrow z)$;

17) $f = (x \square y) \square z \vee \overline{x}$;

18) $f = z \vee y \square x \vee \overline{y}$;

19) $f = x \rightarrow y \square z \wedge \overline{y}$;

20) $f = y \rightarrow z \square x \vee \overline{y}$.

Завдання 7

1. Побудувати схему з функціональних елементів кон'юнкції, диз'юнкції, заперечення, які реалізують функції:

1) $xy \vee xz \vee yz$;

2) $\overline{x \vee \overline{y}z}$;

3) $x\overline{y}z \wedge xy\overline{z} \vee \overline{x}yz$;

4) $x\overline{y}\,\overline{z} \wedge \overline{x}y\overline{z} \vee \overline{x}\,\overline{y}z \vee xyz$;

5) $(x \vee y)(\overline{z} \vee \overline{y})$;

6) $x \to y\overline{z}$;

7) $x \,\square\, \overline{y}z$;

8) $\overline{x}\,\overline{y} \to \overline{y} \vee \overline{z}$.

2. Побудувати схему з функціональних елементів кон'юнкції, диз'юнкції та заперечення, яка має 4 входи. На входи подаються комбінації двійкового коду десяткових цифр 0, 1, 2,..., 9. На виході має бути 1 в тому й лише в тому випадку, коли комбінації на входах відповідають одноцифровим числам:

а) непарним;

б) таким, що не діляться на 3;

в) таким, що не дорівнюють 4, 5, 6.

Скористатися методом карт Карно.

Контрольні запитання та завдання

1. Навести означення числення висловлювань.
2. Які операції виконуються над висловлюваннями.
3. Поняття синтаксису та семантики числення висловлювань.
4. Поняття тавтології (тотожно-істинної), тотожно-хибної, виконливої формул.
5. Навести приклади тавтологій.
6. Пояснити поняття логічного наслідку.
7. Поняття еквівалентних формул, навести приклади.
8. Сформулювати основні властивості логічних операцій, зокрема закони дистрибутивності де Моргана.
9. Пояснити принцип двоїстості в численні висловлювань.
10. Навести означення елементарної диз'юнкції.
11. Навести означення елементарної кон'юнкції.
12. Навести означення конституенти одиниці.
13. Навести означення конституенти нуля.
14. Що таке ДНФ та КНФ?
15. Сформулювати теорему про еквівалентність довільної формули числення висловлювань деякій ДНФ та КНФ.
16. Які функції називаються булевими?
17. Сформулюйте теорему про зв'язок із формулами числення висловлювань, ДДНФ та ДКНФ форми.
18. Який алгоритм подання довільної логічної функції в ДДНФ?
19. Який алгоритм подання довільної логічної функції в ДКНФ?
20. Поняття висловлювальної форми, навести приклад.
21. Поняття інтерпретації висловлювальних форм.
22. Поняття предиката.

23. Навести приклади предикатів.

24. Пояснити операції над висловлювальними формами.

25. Синтаксис та семантика числення предикатів, пояснити значення понять.

26. Пояснити метод математичної індукції з точки зору математичної логіки.

27. Які основні кроки методу математичної індукції?

28. Пояснити застосування операцій розщеплення, склеювання, поглинання для побудови ДДНФ.

29. Навести означення імпліканти та простої імпліканти булевої функції $f(x_1, x_2, ..., x_n)$.

30. Навести означення мінімальної ДНФ булевої функції. Навести приклади.

31. Сформулювати теорему про скорочену диз’юнктивну нормальну форму.

32. Навести означення тупикової диз’юнктивної нормальної форми.

33. Як побудувати скорочену ДНФ методом Квайна?

34. Навести означення імплікантної таблиці.

35. Які кроки побудови мінімальної ДНФ методом Квайна?

36. Навести означення карти Карно для n = 3.

37. Навести означення карти Карно для n = 4.

38. Поняття мінімізації булевих функцій методом карт Карно.

39. Навести означення логічного синтезу й аналізу схем дискретної дії.

40. Навести означення функціонального елемента.

ПІСЛЯМОВА

У навчальному посібнику розкрито основні теоретичні положення розділів «Множини» та «Математична логіка» курсу дискретної математики, наведені приклади розв'язання задач з розгорнутими поясненнями, варіанти завдань для виконання індивідуальних робіт, список навчальної літератури.

Показане практичне застосування абстрактної теорії булевих функцій в електротехніці та схем з функціональних елементів, які реалізують арифметичні операції з двійковими числами.

Цінність посібника полягає в ілюстрації основних понять і теорем великою кількістю розв'язаних задач. Подані зразки виконаних завдань, що дозволяє студентам самостійно опанувати матеріал з відповідного розділу дисципліни «Дискретна математика».

Навчальний посібник рекомендований для студентів денної форми навчання спеціальності 014.09 Середня освіта (Інформатика), які вивчають дисципліну «Дискретна математика».

Глосарій

Алгебра висловлювань (множин, булевих функцій). Множина висловлювань (множин, булевих функцій) разом з уведеною на ній системою операцій.

Булєан *A*. Множина, елементами якої є всі підмножини даної множини *A* включно з порожнею множиною $\varnothing$ та самою множиною *A*.

Булева змінна. Змінна, яка може приймати два значення: нуль або одиниця.

Булева функція n змінних. Функція з E_2^n в E_2, де $E_2 = \{0,1\}$. Булеву функцію n змінних називають також n-місною.

Висловлювання – це розповідне речення, про яке в даний момент можна сказати, істинне воно чи хибне, але не те й інше одночасно.

Диз'юнктивною нормальною формою (*ДНФ*) називають диз'юнкцію $D = k_1 \vee k_2 \vee ... \vee k_n$ елементарних кон'юнкцій k_j, у якій k_j попарно різні.

Досконалою диз'юнктивною нормальною формою (*ДДНФ*) називають ДНФ, у якій кожна елементарна кон'юнкція $k_j (j = 1,..., s)$ – конституента одиниці.

Досконалою кон'юнктивною нормальною формою (ДКНФ) називають КНФ, у якій кожна елементарна диз'юнкція $d_j \ (j = 1,..., s)$ – конституента нуля.

Елементарною диз'юнкцією називають вираз $k = x_{i_1}^{\sigma_1} \vee x_{i_2}^{\sigma_2} \vee ... \vee x_{i_r}^{\sigma_r}$, у якому всі x_{ij} різні, x_{ij} є *X*. Число r називають **рангом диз'юнкції**. Якщо r = 0, диз'юнкцію називають **порожньою** та вважають такою, що дорівнює 0. Наприклад, елементарні диз'юнкції – $\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_5, 0, \bar{x}_1 \vee x_3$.

Елементарною кон'юнкцією називають вираз $k = x_{i_1}^{\sigma_1} x_{i_2}^{\sigma_2} ... x_{i_r}^{\sigma_r}$, де

x_{i_j} – змінні з множини $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$, причому всі x_{i_j} різні. Число r називають **рангом кон'юнкції.** $x^{\sigma} = \begin{cases} \bar{x}, \ якщо \ \sigma = 0, \\ x, \ якщо \ \sigma = 1. \end{cases}$

Імплікантою булевої функції $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ називають елементарну кон'юнкцію $k = x_{i_1}^{\sigma_1} x_{i_2}^{\sigma_2} ... x_{i_r}^{\sigma_r}$ якщо на довільному наборі значень змінних, на якому $k = 1$, значення функції f також дорівнює І. Інакше кажучи, k – імпліканта функції f, якщо функція $k \to f$ тотожно дорівнює 1 (тобто виключено можливість $k = 1, f = 0$).

Тут $x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_n}$ – якісь зі змінних $x_1, x_2, ..., x_n$.

Ізоморфізм. Взаємно-однозначна відповідність між двома множинами, при якій зберігаються алгебраїчні операції, означені на цих множинах. Ізоморфними є алгебра висловлювань, алгебра множин та булева алгебра.

Кон'юнктивною нормальною формою (*КНФ*) називають кон'юнкцію $d_1 \wedge d_2 \wedge ... \wedge d_s$ елементарних диз'юнкцій d_j у якій усі d_j різні.

Конституента одиниці. Елементарна кон'юнкція, що містить усі змінні з множини *X*. Інакше кажучи, конституента одиниці – це елементарна кон'юнкція з рангом *n*. Усіх різних конституент одиниці для фіксованої множини *n* змінних $x_1, x_2, ..., x_n$ є 2^n.

Мінімальною ДНФ булевої функції називають її ДНФ, що складається з найменшої можливої кількості букв. При цьому кожну букву враховують стільки разів, скільки вона зустрічається в ДНФ. Наприклад, ДНФ $\bar{x}y \vee x\bar{y} \vee xz$ складається з шести букв.

Простою імплікантою булевої функції f називають елементарну кон'юнкцію k, якщо k – імпліканта функції *f,* а елементарна кон'юнкція, одержана з k вилученням довільної букви, – не імпліканта.

Розщеплення кон'юнкцій які містять не всі змінні: якщо кон'юнкція k не містить змінної *x*, то $k = k(x \vee \overline{x}) = kx \vee k\overline{x}$. Таким способом ДНФ можна звести до ДДНФ.

Синтез – з'єднання різних частин об'єкта в єдине ціле.

Скороченою диз'юнктивною нормальною формою (СДНФ) булевої функції f називають її диз'юнктивну нормальну форму, що складається з усіх простих імплікант цієї функції.

Т 7.17. СДНФ $D_{\text{скор}}$ булевої функції f задає цю функцію, тобто

$f = D_{\text{скор}}$.

Тупиковою ДНФ булевої функції Диз'юнктивну нормальну форму $D_{\text{туп}}$, яка задає функцію f (тобто $f = D_{\text{туп}}$), називають **тупиковою** ДНФ цієї функції, якщо:

а) кожна елементарна кон'юнкція з $D_{\text{туп}}$ – проста імпліканта функції *f;*

б) вилучення з формули $D_{\text{туп}}$ довільного диз'юнктивного члена призводить до ДНФ D_1, яка не задає функцію *f*, тобто $f \neq D_1$.

Функціональним елементом називають пристрій з n–входами та одним виходом. Кожному функціональному елементу співвідносять булеву функцію n змінних $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, щодо цієї функції кажуть, що даний функціональний елемент реалізує її.

Список використаних джерел:

1. Андрійчук В.І. Вступ до дискретної математики / В. І. Андрійчук, М. Я. Комарницький, Ю. Б. Іщук; Львів. нац. ун-т ім. І. Франка. – Львів, 2003. – 254 с.

2. Андрійчук Ю.В. Вступ до дискретної математики / Ю. В. Анрійчук, М. Я. Комарницький, Ю. Б. Іщук. – Львів : ВЦ ЛНУ ім. Івана Франка, 2003. – 254 с.

3. Базилевич Л. Є. Дискретна математика у прикладах і задачах : підр. / Л. Є. Базилевич. – Львів : Вид-во І. Е. Чижиков, 2013. – 487 с.

4. Бондарчук Ю. В., Олійник Б. В. Основи дискретної математики / Ю. В. Бондарчук, Б. В. Олійник. – Київ : Видавничий дім «Києво-Могилянська Академія», 2009. – 160 с.

5. Борисенко О. А. Лекції з дискретної математики (множини і логіка) : навч. посіб. / О. А. Борисенко. – Суми : ВТД «Університетська книга», 2002. – 180 с.

6. Гвоздьова Є. В. Дискретна математика : навч. посіб. для студентів напрямів підгот. «Комп'ютерні науки» та «Економічна кібернетика / Є. В. Гвоздьова, М. О. Гірник. – Львів : Вид-во Львів. комерц. акад., 2015. – 123 с.

7. Джеймс А. Дискретная математика и комбінаторика : підр. / А. Джеймс : – Москва : Издательский дом «Вильяме», 2004. – 960 с.

8. Калбертсон Дж. Т. Математика и логика цифровых устройств / Дж. Т. Калбертсон . – Москва : Просвещение, 1965. – 268с.

9. Кемени Дж. Введение в конечную математику / Дж. Кемени, Дж. Снелл, Дж. Томпсон. – Москва : Мир, 1963. – 486 с.

10. Кривий С. Л. Дискретна математика. Вибрані питання / Л. С.Кривий. – К. : Видавничий дім «Києво-Могилянська Академія», 2007.

11. Нікольский Ю. В. Дискретна математика : підр. /

Ю. В. Нікольський, В. В. Пасічник, Ю. М. Щербина. – Київ: Видавнича група BHV, 2007. – 368с.

12. Олейко А. Я. Дискретна математика : навч.-метод. посібник / А. Я. Оленко, М. Й. Ядренко. – К : НаУКМА, 1996.

13. Основи дискретної математики : навч. посіб. Ч. 2. Математична логіка. Теорія графів / В. С. Ільків, П. І. Каленюк, І. В. Когут, З. М. Нитребич, П. Я. Пукач, П. Л. Сохан, Р. Р. Столярчук, У. Б. Ярка; МОНМС України, Нац. ун-т «Львів. політехніка». – Львів, 2011. – 184 с.

14. Столл Р. Р. Множества, логика, аксиоматические теории / Р. Р. Столл. – Москва : Просвещение, 1968. – 232 с.

15. Столяр А. А. Элементарное введение в математическую логику / А. А. Столяр . – Москва : Просвещение, 1965.–164 с.

16. Трохимчук Р. М. Дискретна математика : навч. посіб. для студ. ВНЗ / Р. М. Трохимчук. – Київ : Вид. дім «Професіонал», 2010. – 528 с.

17. Трохимчук Р. М. Збірник задач з теорії булевих функцій: навчальний посібник / Р. М. Трохимчук. – К.: ВПЦ «Київський університет», 2001.

18. Трохимчук Р. М. Множини і відношення: навчальний посібник / Р. М. Трохимчук. – К., 1993.

19. Швачич Г. Г. Дискретний аналіз: навч. посібник / Г. Г. Швачич, Г.І. Рижанкова, В.П. Барвінок, М. О. Коломоєц. – Дніпропетровськ : НМетАУ, 2007. – 29 с.

20. Ядренко М. Й. Дискретна математика: навч.-метод.посібник / М. Й Ядренко. – К. : ТВіМС, 2004. – 244 с.