

Міністерство освіти і науки України
Департамент науки і освіти
Харківської обласної державної адміністрації
КОМУНАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«ХАРКІВСЬКА ГУМАНІТАРНО-ПЕДАГОГІЧНА АКАДЕМІЯ»
ХАРКІВСЬКОЇ ОБЛАСНОЇ РАДИ

ПРОГРАМНІ ЗАСОБИ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ МАТЕМАТИЧНИХ ЗАДАЧ

Методичні настанови
до виконання індивідуальних завдань для здобувачів вищої освіти
ОПП «Середня освіта (Інформатика)», освітній рівень «бакалавр»

Частина 1

Харків

2020

УДК 378.016:51 (072)

П 78

Укладач:

Дригач Т. Г. – кандидат педагогічних наук, старший викладач кафедри математики та фізики Комунального закладу «Харківська гуманітарно-педагогічна академія» Харківської обласної ради.

Рецензенти:

Босін М. Є. – доктор фізико-математичних наук, професор завідувач кафедри математики та фізики Комунального закладу «Харківська гуманітарно-педагогічна академія» Харківської обласної ради;

Морквян І. В. – кандидат педагогічних наук, викладач інформатики та математики Комунального закладу «Харківський університетський ліцей Харківської міської ради Харківської області».

П 78 Програмні засоби для розв’язування математичних задач: метод. настанови до виконання індивідуальних завдань для здобувачів вищої освіти ОПП «Середня освіта (Інформатика)», освітній рівень «бакалавр» / Т. Г. Дригач ; Комунальний заклад «Харківська гуманітарно-педагогічна академія» Харківської обласної ради. – Харків, 2020.– Ч.1. – 76 с.

Методичні настанови до виконання індивідуальних завдань освітнього компоненту «Програмні засоби для розв’язування математичних задач» рекомендовані для здобувачів вищої освіти ОПП «Середня освіта (Інформатика)» (освітній рівень «бакалавр»). Робота містить необхідні теоретичні відомості, приклади виконання завдань та самі завдання для індивідуального виконання.

УДК 378.016:51 (072)

Рекомендовано до друку науково-методичною радою факультету соціально-педагогічних наук та іноземної філології Комунального закладу «Харківська гуманітарно-педагогічна академія» Харківської обласної ради (Протокол № 2 від 20.10.2020 р.)

© ХГПА, 2020

© Дригач Т. Г.

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА.....	4
ТЕМА 1. МАТЕМАТИЧНИЙ ПАКЕТ SMATH STUDIO. НАЙПРОСТІШІ ОБЧИСЛЕННЯ І ОПЕРАЦІЇ	5
1.1 Теоретичні відомості.....	5
1.2 Приклади виконання завдань.....	15
1.3 Індивідуальні завдання.....	19
ТЕМА 2. СПРОЩЕННЯ ТА ОБЧИСЛЕННЯ ВИРАЗІВ ІЗ ВИКОРИСТАННЯМ CAS GEOGEBRA (COMPUTER ALGEBRA SYSTEM, СИСТЕМА КОМП'ЮТЕРНОЇ АЛГЕБРИ).....	24
2.1 Теоретичні відомості.....	24
2.2 Приклади виконання завдань.....	27
2.3 Індивідуальні завдання.....	32
ТЕМА 3. СТВОРЕННЯ ДИНАМІЧНИХ МОДЕЛЕЙ, СПРЯМОВАНИХ НА ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЙ. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ РІВНЯНЬ ТА ЇХ СИСТЕМ ЗАСОБАМИ GEOGEBRA.....	37
3.1 Теоретичні відомості.....	37
3.2 Приклади виконання завдань.....	42
3.3 Індивідуальні завдання.....	44
ТЕМА 4. ADVANCED GRAPHER. ПОБУДОВА ТА ДОСЛІДЖЕННЯ ГРАФІКІВ ФУНКЦІЙ. ОБЧИСЛЕННЯ ПЛОЩ ПЛОСКИХ ФІГУР ЗА ДОПОМОГОЮ МАТЕМАТИЧНИХ ПАКЕТІВ ADVANCED GRAPHER ТА GEOGEBRA.....	46
4.1 Теоретичні відомості.....	46
4.2 Приклади виконання завдань.....	49
4.3 Індивідуальні завдання.....	55
ТЕМА 5. МАТЕМАТИЧНА СИМВОЛІКА ТА КУЛЬТУРА МАТЕМАТИЧНИХ ЗАПИСІВ. НАБІР ТА РЕДАГУВАННЯ МАТЕМАТИЧНИХ ФОРМУЛ. РЕДАКТОР ФОРМУЛ У WORD. LATEX.....	60
5.1 Теоретичні відомості.....	60
5.2 Приклади виконання завдань.....	67
5.3 Індивідуальні завдання.....	68
ПІСЛЯМОВА.....	73
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	74

ПЕРЕДМОВА

Методичні настанови до виконання індивідуальних завдань «Програмні засоби для розв'язування математичних задач» рекомендовані для здобувачів першого рівня вищої освіти ОПП Середня освіта (Інформатика).

Метою курсу «Програмні засоби для розв'язування математичних задач» є опанування здобувачами освіти знаннями, уміннями та навичками роботи з пакетами прикладних програм GeoGebra, Gran-3D, DG, SMath Studio, Advanced Grapher призначених для математичних обчислень, розв'язування алгебраїчних та геометричних задач. Для вивчення цього курсу необхідні знання таких розділів математики, як методологія шкільного курсу математики, лінійна алгебра та аналітична геометрія, математичний аналіз. У процесі навчання студенти ознайомляться зі STEM-освітою, з можливостями, особливостями використання сучасних математичних пакетів, поглиблять знання з математики, здобудуть навички розв'язання задач з використанням прикладних програм, роботою з математичними формулами, а також набувають навичок роботи з LATEX – стандартом оформлення наукових публікацій з математики.

Курс складається з двох змістових модулів, які охоплюють алгебраїчний та геометричний матеріал.

Здобувачі вищої освіти, опановуючи 1 змістовий модуль «Математичні засоби для розв'язування алгебраїчних задач», вивчають основні функції, можливості, інструменти математичних пакетів GeoGebra, SMath Studio, Advanced Grapher; правила користування існуючими математичними пакетами; алгоритми розв'язання задач, реалізованих у вбудованих функціях математичних пакетів; математичну символіку та культуру математичних записів; основні принципи створення документів, що містять математичні формули в системі LaTeX, опановують застосування здобутих теоретичних знань до розв'язування практичних завдань.

ТЕМА 1. МАТЕМАТИЧНИЙ ПАКЕТ SMATH STUDIO. НАЙПРОСТІШІ ОБЧИСЛЕННЯ І ОПЕРАЦІЇ

Список рекомендованих джерел:

1. Информатика. Простейшие вычисления и операции в SMath Studio: метод. указания к выполнению лабораторной работы №1 для студентов очной формы обучения по всем направлениям подготовки. Брянск: БГТУ, 2014. 19 с.
2. И. А. Гетьман, Л. В. Васильева, С. В. Малыгина, Е. А. Клеваник Информатика. Практикум : учеб. пособ. Краматорск : ДГМА, 2012. 148 с. URL : <https://goo.su/1nmi>.
3. Лабораторний практикум з дисципліни «Інформаційні технології аналізу систем»: для здобувачів освітнього ступеня бакалавр зі спеціальності 122 «Комп'ютерні науки» та 124 «Системний аналіз» / упоряд. Ю. В. Триус, І. В. Герасименко / М-во освіти і науки України, Черкас. держ. технол. ун-т. Черкаси: ЧДТУ, 2018. 191 с. URL: <https://goo.su/1NmK>.

1.1 Теоретичні відомості

Можливості SMath Studio. SMath Studio – безкоштовна програма (2005 р.) для обчислення математичних виразів і побудови графіків функцій. Робота з інтерфейсом програми нагадує роботу із звичайним аркушем паперу(рис. 1.1).

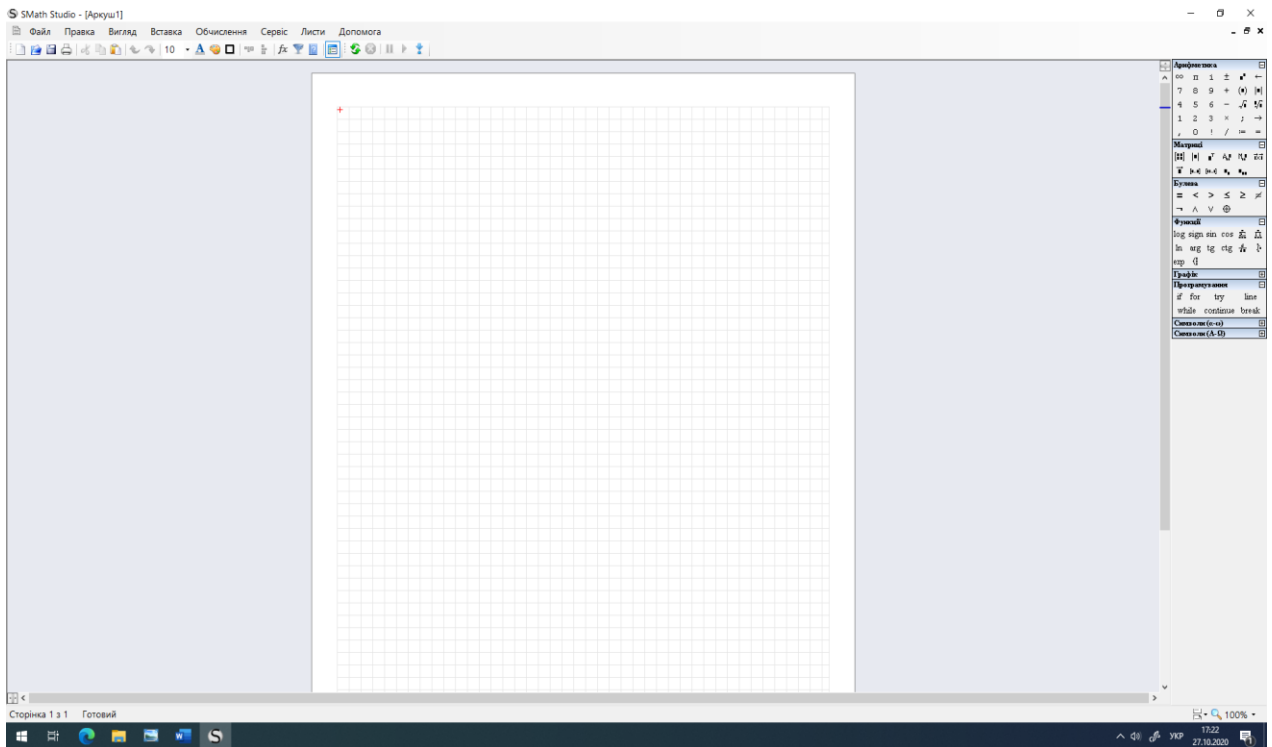


Рис. 1.1

SMath Studio має наступні

можливості:

1. Підтримка наступних типів даних: системи, матриці, вектори, комплексні числа, дроби.

2. Підтримка наступних операцій і функцій: додавання, віднімання, множення (скаляре і векторне), ділення, знаходження факторіала, зведення в ступінь, робота з коренями, визначення модуля, тригонометричні функції, зворотні тригонометричні функції, гіперболічні функції, зворотні гіперболічні функції, логарифми, визначення сигнатури, обчислення аргументу числа, визначення детермінанта (визначника) матриці, транспонування матриць і векторів, обчислення мінорів матриці, обчислення алгебраїчних доповнень матриці, обчислення сліду матриці, визначення рангу, переклад комплексних чисел з алгебраїчного в тригонометричний вид,

диференціювання, інтегрування, рішення рівнянь і багато іншого.

3. Відображення графіків функцій відносно змінної "x" (ікс).

4. Доступні символічні обчислення.

5. Можлива вставка в лист програми текстових областей. Причому при введенні виразу в лист, не користуючись меню програми ("Меню" >> "Вставка"

>> "Текстова область"), програма сама визначає що вводиться текст або формула.

6. Експорт створених листів у форматі html – створення веб-сторінок.

7. Підтримка роботи з параметрами (константи і параметри користувача).

8. Підтримка роботи з функціями (вбудовані і призначені для користувача функції).

9. Необмежений розмір листів і їх кількість.

10. Копіювання, вирізання, вставка і видалення виразів або їх частин.

11. Робота з історією змін (скасувати, повернути).

12. Можливість зберігання і відкриття створених листів, працюючи з власним форматом файлів.

13. Автоматичне зберігання налаштувань при виході з програми.

14. Можливість зміни розміру шрифту виразу, а також його кольору і кольору його фону.

15. Підтримка роботи на пристроях з будь-яким розширенням і орієнтацією екрану (починаючи з 240x240 пікселів і вище).

16. Програма підтримує декілька мов інтерфейсу (англійська, німецька, іспанська, португальська, хорватська, сербський, російська та українська).

Основні елементи інтерфейсу СКМ SMath Studio. Курсор має форму хрестика. Для присвоєння змінній значення або виразу необхідно ввести двокрапку, після чого програма сама зрозуміє наміри користувача і додасть

знак "=". Для того, щоб отримати відповідь, достатньо записати на робочому листі змінну, якій присвоєно вираз, і написати після неї знак "=" (Рис. 1.2)

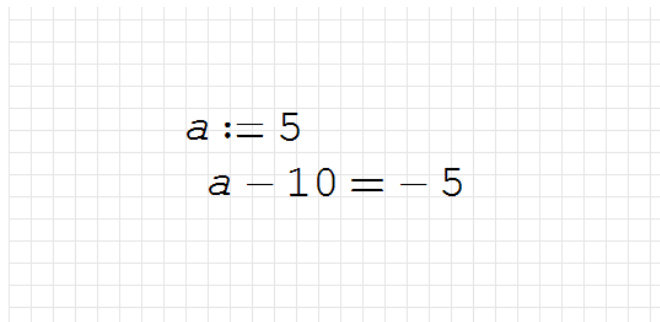


Рис. 1.2

Курсор під час сеансу роботи можна розмістити в будь-якому місці екрану, всі визначення змінних справедливі тільки для виразів що знаходяться нижче них.

Наприклад, якщо ввести значення змінної до запису виразу, він буде обчислений для останнього запису, який розташований до нього (Рис. 1.3).

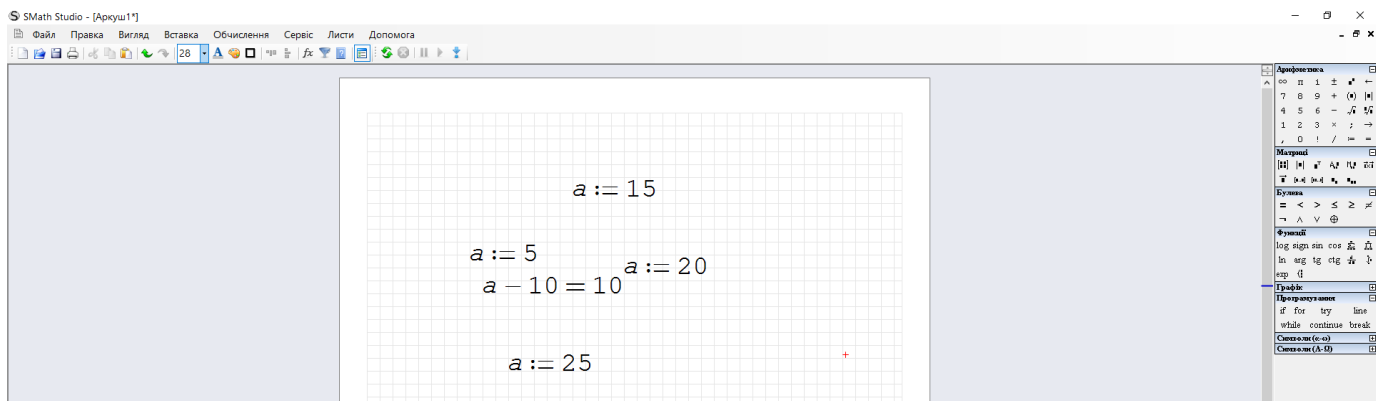


Рис. 1.3

Прості обчислення – не єдине, що може SMATH Studio. Завдяки можливості обробляти матриці, процес обчислення одного і того ж виразу (або значень функції) при зміні змінних відчутно прискорюється.

Наприклад, для виразу $x = 7t + 5$, при $t = 1, 3, 5, 105$, набирати чотири різних вирази не потрібно, також не потрібно змінювати значення змінної t . Досить визначити " t " як матрицю з чотирьох елементів і отримаємо відповідь відразу для чотирьох значень (рис. 1.4).

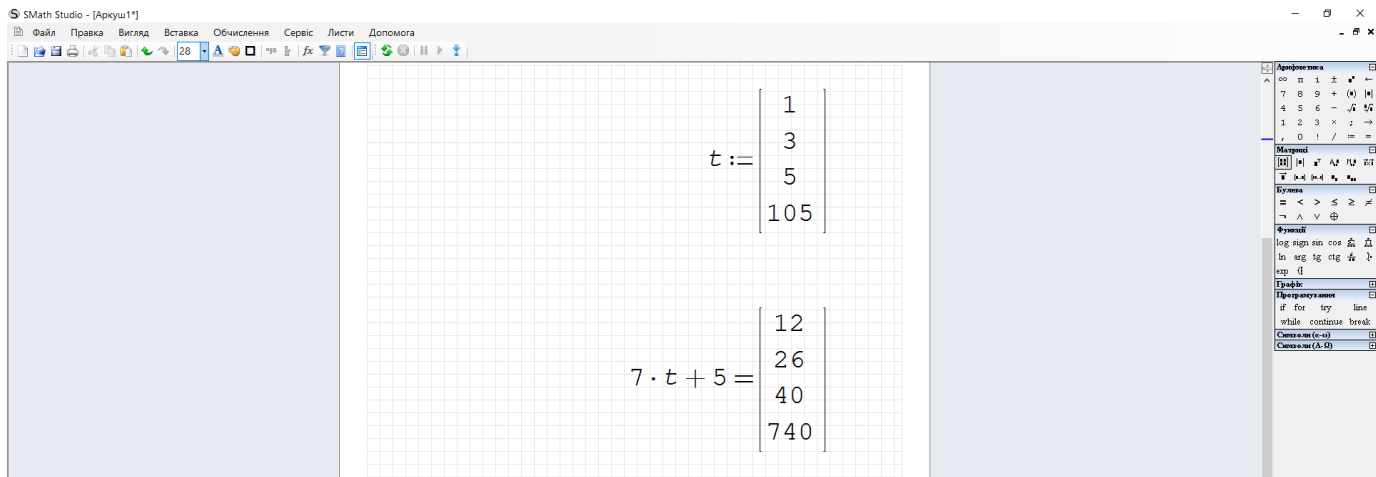


Рис. 1.4

Крім цього, програма обраховує символльні обчислення, операції з тригонометричними функціями, диференціювати функції (рис. 1.5).

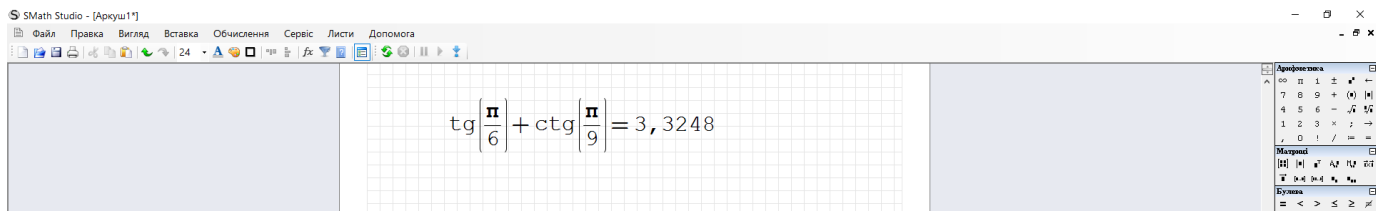


Рис. 1.5

Однією з переваг SMATH Studio є можливість збереження файлів, завдяки чому обчислення, розпочаті в раніше можна продовжувати у будь-який час.

Враховуючи те, що SMATH Studio активно розвивається, в перспективі вона може стати дуже потужним і універсальним математичним пакетом. Зараз програма розповсюджується безкоштовно.

Основи роботи в програмі. У програмі є основне робоче поле, в якому і проводяться всі обчислення у формі, максимально наближеній до стандартних математичних позначень. Поле при стандартних налаштуваннях виглядає як аркуш із зошита в клітинку, і в ньому користувач і вводить математичні вирази. Для цього треба встановити курсор (червоний хрестик) у вподобане місце і почати введення з клавіатури. Після того, як вираз введено, можна його порахувати, натиснувши «=».

Схожим способом оголошується змінна: пишеться ім'я, ставиться знак присвоєння «: =» за допомогою кнопки на панелі «Арифметика» або двокрапкою на клавіатурі, вводиться значення. Оголошену зміну можна використовувати у виразах, її значення буде підставлено автоматично при обчисленнях. Якщо навести курсор миші на невиділений вираз, то з'явиться його результат в символній формі.

Реакція програми на натискання деяких клавіш залежить від контексту. У таблиці 1.1 наведені найбільш часті варіанти.

Таблиця 1.1 – Реакція програми на натискання деяких клавіш

Таблиця 1.1.

Клавіші	Реакція
Пробіл	Вставка «#» в робочому полі аркушу, виділення більшої частини виразу при вже виділеному кутовим курсором частині виразу, пробіл для текстового поля.
Введення	Вставка порожнього проміжку на аркуші, вихід з поля виразу.
Курсорні клавіші	Перехід до наступного або попереднього вислову, рух по елементах виразу зі зміною кутового курсора.
\	Корінь квадратний в робочому полі аркуша або зворотний слеш в тексті.
/	Дріб в робочому полі аркушу або прямий слеш в тексті.
:	У текстовому полі це так і залишиться двокрапкою, а в робочому полі аркуша перетвориться на знак присвоєння.
=	Знак дорівнює в тексті і команда чисельного обчислення в полі формули. Для спроби обчислення неописаної змінної буде проведена заміна на «:=».
@	Shift+2. «Равлик» в тексті на англійській розкладці, (на українській – типографські лапки) або двовимірний графік у робочому полі аркуша.
[У тексті це буде виглядати так само, а при введенні формули стане місцем для нижнього індексу.

Вікно програми містить заголовок, головне меню, панель інструментів і робоче поле (у клітинку).

При наведенні курсору на ту чи іншу кнопку панелі інструментів з'являється підказка, тому пояснювати призначення кнопок не потрібно (Рис. 1.6)

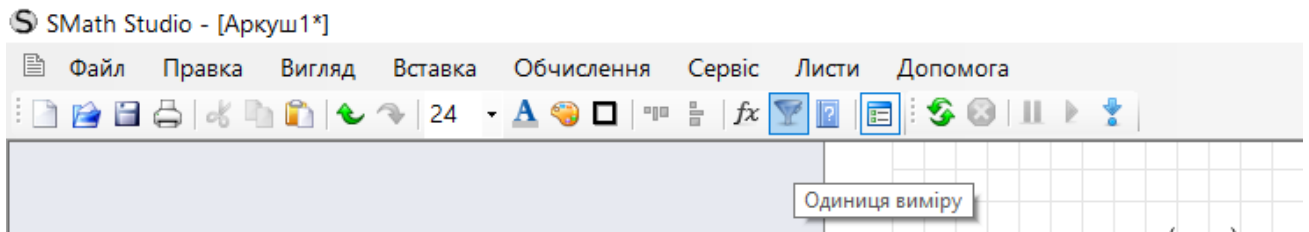


Рис. 1.6

У SMath Studio є деякі правила запису виразів:

- використана змінна або функція повинні бути описані заздалегідь. Заздалегідь – значить лівіше або вище того виразу, де вона використовується в обчисленні;

- якщо значення змінною змінювалось, то буде використано те значення, яке зустрілося самим останнім перед використанням в обчисленнях. При описі змінної у виразі можна використовувати вбудовані і раніше описані функції, раніше задані змінні та їх поєднання. Якщо використовуються у виразі змінні, які раніше не описувалися, то результат можна буде отримати тільки в символьному вигляді (або описати відсутні змінні і розмістити вираз нижче або правіше описаних змінних для чисельного результату);

- змінна не обов'язково повинна обчислюватися як числове значення, допускається присвоєння імен виразам, що дають при обчисленні матрицю;

- для символьних обчислень описувати змінні заздалегідь не потрібно, якщо не треба, щоб при перетворенні виразів були підставлені їх значення.

Бічна панель інструментів розташована праворуч у вікні програми і

може бути прибрана, за непотрібністю, натисканням на крайню праву кнопку головної панелі інструментів. Бічна панель складається з окремих панелей, що містять набори команд у вигляді кнопок. Кожна така панель може бути згорнута за допомогою кнопки , розташованої в правому кутку заголовка панелі. Розглянемо призначення панелей.

Панель «Арифметика» містить цифри 0 ... 9, роздільник десяткового дробу (в залежності від налаштувань операційної системи, це може бути і крапка і кома), букву π для однойменного числа, знак факторіала «!», операції зведення в ступінь «^», взяття квадратного кореня «\» або кореня n -го ступеня $\text{Ctrl} + \langle \backslash \rangle$. Ще на панелі є графічний варіант клавіші Backspace і знаки присвоювання «:», символічного обчислення $\text{Ctrl} + \langle . \rangle$ і знак рівності для обчислення в чисельній формі.

Панель «Матриці» надає можливість задати матрицю ($\text{Ctrl} + \langle M \rangle$), обчислити її визначник, транспонувати матрицю, отримати алгебраїчне доповнення, мінор, обчислити векторний твір. Останнє виглядає трохи дивно, але справа в тому, що вектор задається як вектор-стовпець з розміром в 3 елементи, по одному на кожному рядку.

Панель «Булева» має на увазі алгебра. Операції відношення, заперечення, «і», «або», «виключає або». Булеве «дорівнює» використовується ще й в завданні умов для функції if і в циклі for.

Панель «Функції» тут зібрана добірка основних тригонометричних функцій, визначений інтеграл, взяття похідної в точці, сума елементів . Ще є кнопки «2D» і «3D» для вставки двовимірних або тривимірних графіків, натуральний логарифм, відсотки, вибір елемента за індексом («el» або квадратні дужки на клавіатурі), знак системи.

Слід детальніше зупинитися на функції диференціювання. Результат роботи цієї функції залежить від того, вибрано чи обчислення значення похідної в точці за допомогою «= \Rightarrow » (змінна повинна бути визначена) або використано символічне обчислення « \rightarrow ». Якщо використано символічне

обчислення, то результат залежить від того, чи була визначена змінна заздалегідь. Якщо ні, то буде видано вираз для похідної за заданими змінними. Якщо ж змінна була визначена, то буде проведена підстановка в результат її значення.

Панель «Графік» тут можна обертати, масштабувати і зрушувати графіки, задати відображення точками або лініями, перемальовувати графіки заново у разі потреби. Операція обертання доступна тільки для тривимірних графіків (зрозуміло, що для двовимірних її користь була б сумнівною). Графіки малюються в декартовій системі координат.

Графіки будуються для функцій від змінної «x» (2D) або «x» і «y» (3D). Взагалі, функції можуть бути від будь-яких аргументів, але при побудові графіка повинні бути вказані в якості аргументів саме ці змінні.

Панель «Програмування» містить засоби, що надають можливість організувати циклічні обчислення (цикли «for» і «while») або задати умовну функцію «if». Замість операторних дужок використовується лінія (line). Лінія за замовчуванням містить два місця для послідовних обчислень, але її можна розтягнути. Для цього потрібно виділити лінію кутовим курсором (треба клікнути по місцю, зазначеному квадратиком і натиснути пробіл, щоб виділилися обидва місця). Повинна з'явитися спеціальна квадратна мітка, зачепивши яку мишкою, можна розтягнути лінію до необхідної кількості місць. Аналогічний спосіб розтягування працює і для отримання системи.

Панель «Символи» потрібна для вставки букв грецького алфавіту. Історична традиція використання для імен функцій і параметрів грецьких букв вимагає, щоб така можливість була. Інакше довелося б писати alpha, beta, gamma

Слід зауважити, що латиниці і грецьких букв математикам давно вже не вистачає, багатобуквенні імена у них якось не приживаються, на відміну від тих же програмістів, і скоро вже будемо використовувати характерні

літери з кирилиці, іврити і китайські ієрогліфи :-). Грецьку букву можна отримати і по іншому: ввести латинську і натиснути Ctrl + «G».

Меню «Вставка» надає можливість використовувати й інші вбудовані функції. Функції згруповані за розділами. Клацання мишею в списку «Ім'я функції» і натискання буквенної клавіші покажуть функцію, що починається з цієї букви. (див. рис.1.7).

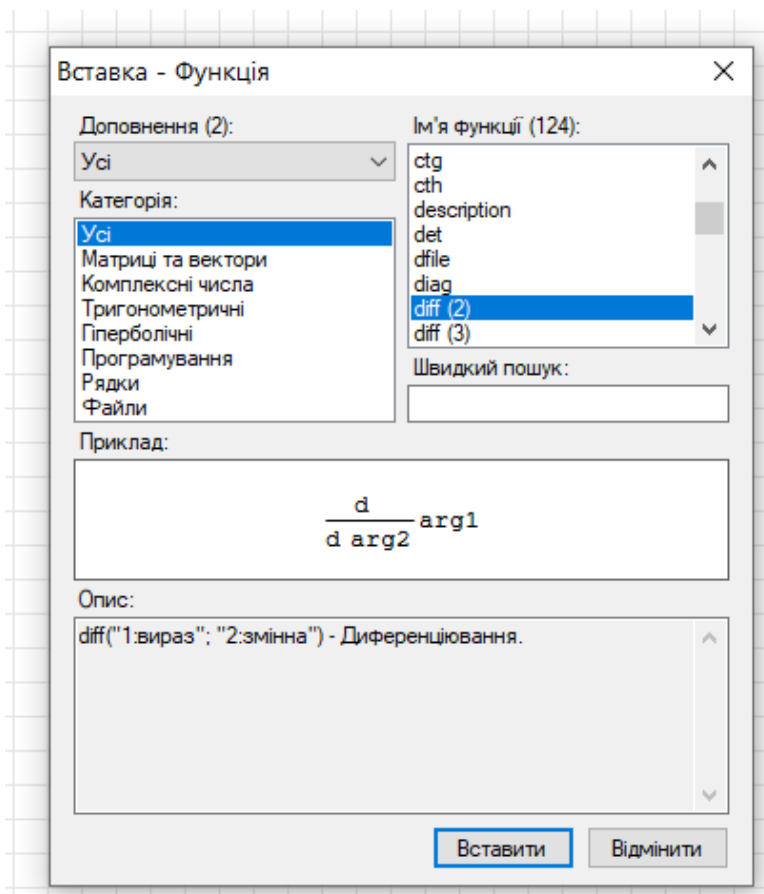


Рис. 1.7

В полі «Опис» дається синтаксис функції та її опис, що є своєрідною заміною меню «Допомога». Знання синтаксису надає можливість не використовувати вставку функцій, а набирати безпосередньо ім'я функції. Деякі з функцій у процесі набору змінюють свій вигляд, як наприклад функція модуля $\text{abs}(x)$ перетворюється в $|x|$.

Поле «Приклад» показує приклад використання з урахуванням того, як функція буде виглядати. Це суттєво допомагає розібратися з тим, які

аргументи яких функцій вимагають, і як це буде виглядати після їх опису.

Меню «Вид» містить всього один пункт з прапорцем, який слід встановити або зняти.

Меню «Вставка» призначене для впровадження в лист матриць, операторів, графіків, малюнків, текстових областей і розділювачів для оформлення документа.

Меню «Обчислення» містить цілий набір можливих дій. Виділивши вираз або його частину, можна знайти корені рівняння, зробити обчислення з урахуванням підстановок і скорочень, спростити вираз, отримати зворотне значення в символічному або числовому вигляді, отримати похідну по виділеній заздалегідь змінній і визначнику матриці.

1.2 Приклади виконання завдань

1. Обчислити значення арифметичного виразу.

Клацніть мишею по будь-якого місця в робочому документі – в поле з'явиться червоний хрестик, що позначає позицію, з якої починається введення. Введіть з клавіатури символи в наступній послідовності: $6/8 + 9/18$.

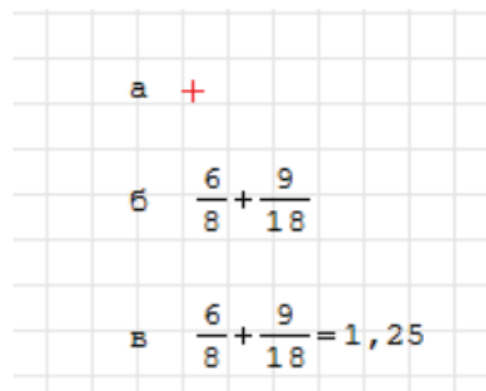


Рис. 1.8

Введіть з клавіатури знак рівності, натиснувши клавішу «=». SMath Studio обчислює значення виразу і виводить праворуч від знака рівності результат (див. рис. 1.8).

2. Обчислити значення виразу, що містить змінні.

Клацніть мишею по вільному місцю в робочому документі і введіть з клавіатури символи a:. Введіть з клавіатури символ 8 і клацніть по вільному місцю поза полем введення. Клацніть мишею по вільному місцю в робочому документі і введіть з клавіатури b: 6, клацніть по вільному місцю поза полем введення. Клацніть мишею по вільному місцю в робочому документі і введіть з клавіатури $a + b$ <Space> / $a * b$ <Space> <Space> = і клацніть по вільному місцю поза полем введення (див. рис. 1.9).

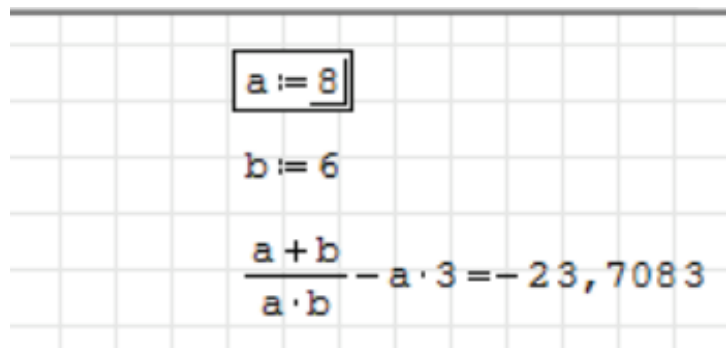


Рис. 1.9

Якщо при введенні виразу була допущена помилка, виділіть неправильний символ кутовий рамкою (клацніть праворуч вниз біля символу), видаліть виділений символ (натисніть клавішу <Backspace>) і введіть в поміченій позиції виправлення. SMath Studio читає і виконує введені вирази зліва направо і зверху вниз, тому стежте, щоб вираз для обчислення розташовувався правіше або нижче визначених значень.

3. Знайти значення функції $f(x) = (x + 1) : (x^2 + 1)$ при $x = 1,2$ і побудувати таблицю значень функції для $x [1, 10]$ з кроком 1.

Клацніть по вільному місцю в робочому документі, введіть з клавіатури $f(x) = x + 1$ <Space> / x^2 <Space> + 1 і потім клацніть по робочому документу поза полем введення. Клацніть по вільного місця в робочому документі і введіть з клавіатури $f(1,2) =$. Відразу після введення знака рівності негайно виводиться обчислене значення функції $f(x)$ при $x = 1,2$.

Задаємо дискретні значення аргументу $x [1, 10]$ з кроком 1 клацнувши по вільному місцю в робочому документі, введіть з клавіатури $x := \text{range} ($ Вводимо 1; 2 .. 10 і клацніть поза полем введення.

Далі необхідно організувати цикл для підрахунку функції від кожного елемента вектора окремо, клацнувши по вільного місця в робочому документі, виберіть з блоку «Програмування» оператор for, заповніть змінними і клацніть поза полем введення. Для числа з нижнім індексом з блоку «Функції» використовуйте e1. Потім вводимо з клавіатури у =

Внаслідок праворуч від вираження з'являться значення функції (див. рис. 1.10).

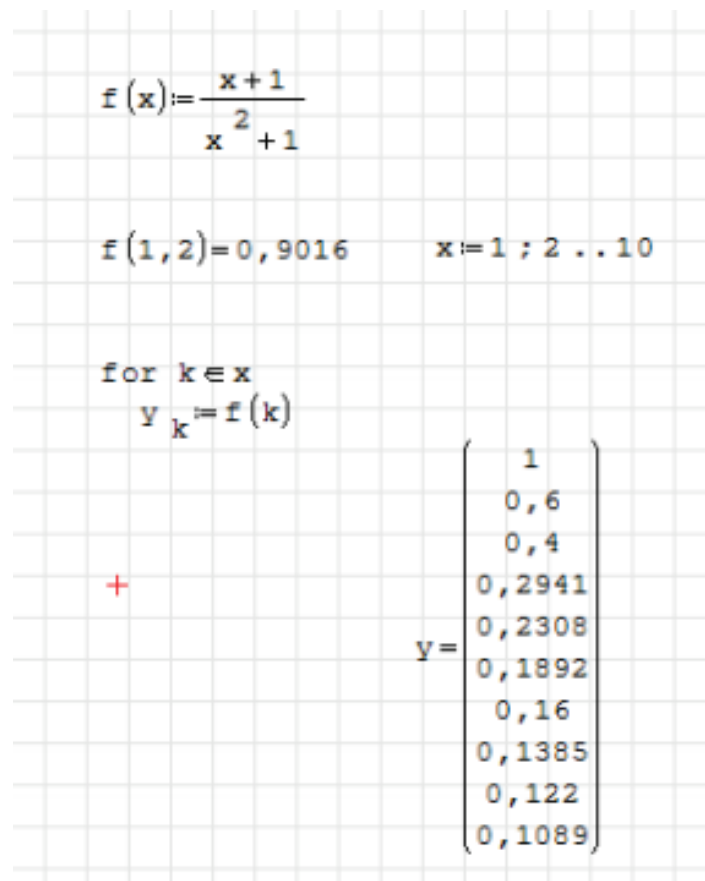


Рис. 1.10

4. Побудувати графік функції.

Побудуємо графік функції для функції з попереднього прикладу. Клацніть по вільному місцю в робочому документі, потім - в меню «Вставка» виберіть «Графік» → «Двовимірний». У полі наберіть $f(x)$ (див. рис.1.11).

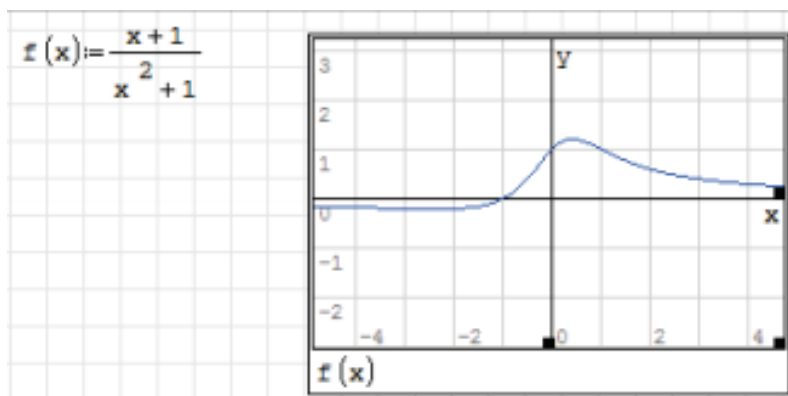


Рис. 1.11

$$\left(\frac{1}{d} - \frac{1}{c}\right) \cdot \frac{c^2 \cdot d^2}{c^2 - d^2}$$

5. Спростити вираз

Клацніть по вільному місцю в робочому документі, введіть аналогічно попереднім прикладам вираз. Для того щоб спростити введене вираз, використовуйте меню «Обчислення»: клацніть справа внизу у останнього символу виразу і виділіть його. Потім клацніть в меню «Обчислення» по рядку «Спростити». Результат буде відображений в робочому документі знизу.

$$\left(\frac{1}{d} - \frac{1}{c}\right) \cdot \frac{c^2 \cdot d^2}{c^2 - d^2}$$

$$\frac{c \cdot d}{c + d}$$

Рис. 1.12

б. Розв'язати символічне рівняння.

Є кілька способів:

Перший, записати рівняння на аркуші програми, потім виділити змінну рівняння і в меню програми вибрати «Обчислення» → «Знайти коріння».

Після цього під записаним рівнянням з'явиться рядок відповіді (ів), тобто коренів рівняння (див. рис.1.13).

$$x^2 - 81$$

$$\begin{bmatrix} -3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Рис. 1.13

Другий, Використовуючи функцію «solve ([рівняння]; [змінна])». Після запису даної функції на аркуші програми досить, не забираючи з рівняння курсор, виконати дію чисельного обчислення (кнопка «=» на клавіатурі або на панелі програми). Саме рівняння, записане в якості першого аргументу функції solve (...) може бути записано без правої частини (тобто, наприклад: $x + 2$) або разом з нею ($x + 2 = 0$), однак слід пам'ятати, що в разі запису повного виду рівняння, з правою частиною, замість звичайного знака дорівнює між лівою і правою частинами рівняння необхідно писати знак булево дорівнює (виглядає, як жирне дорівнює) з булевої панелі інструментів програми.

$$\text{solve}(x^2 + 2 \cdot x + 1; x) = -1$$

Рис. 1.14

1.3 Індивідуальні завдання

1 варіант

1. Обчислити значення числових виразів:

$$1\frac{1}{4} + \frac{1}{9};$$

$$2\frac{3}{5} : \frac{2}{13}.$$

2. Обчислити значення виразів:

$$\frac{2b^2r}{3} - \sqrt{b}, \text{ при } b = 7,211; r = 3,6;$$

$$ma + b^2, \text{ при } m = 0,7; a = 0,6; b = 1,2.$$

3. Визначити значення функції $f(x)$ при $x = 2,9$. Побудувати таблицю значень функції для $x \in [3, 14]$ з кроком 1. Побудувати графік функції, якщо

$$f(x) = \frac{8(x-1)}{(x+1)^2};$$

$$f(x) = (x-1)e^{x+2}.$$

4. Спростити вирази:

$$\frac{a-5}{a} - \frac{a^2+25}{a} \cdot \frac{1}{a-5};$$

$$7a - \frac{a^2+a}{5} \cdot \frac{10}{a+1}.$$

5. Розв'язати кожне рівняння двома способами:

$$x^5 + x^4 - 4x^3 - 4x^2 - 45x - 45 = 0;$$

$$2^x \cdot 3^{x+1} = 108.$$

2 варіант

1. Обчислити значення числових виразів:

$$3\frac{1}{6} + \frac{1}{3};$$

$$5\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{13}.$$

2. Обчислити значення виразів:

$$sr^2, \text{ при } s = 0,5; r = 5,6;$$

$$r^3t - b, \text{ при } r = -0,2; t = 2; b = -1,3.$$

3. Визначити значення функції $f(x)$ при $x = 3,2$. Побудувати таблицю значень функції для $x \in [2, 8]$ з кроком 1. Побудувати графік функції, якщо

$$f(x) = -\frac{5(x+1)}{(7x+1)^3};$$

$$f(x) = (6x-3)e^{x+1}.$$

4. Спростити вирази:

$$9a - \frac{3a^2 - 3a}{15} \cdot \frac{20}{a-1};$$

$$\frac{a^2 - 16}{a} \cdot \frac{1}{a+4} - \frac{a+4}{a}.$$

5. Розв'язати кожне рівняння двома способами:

$$\sqrt{x-1} + \sqrt{2x+6} = 6;$$

$$x^5 - x^4 - 29x^3 + 29x^2 + 100x - 100 = 0.$$

3 варіант

1. Обчислити значення числових виразів:

$$1\frac{3}{4} - 4\frac{1}{9};$$
$$\frac{2}{9} \cdot 1,8.$$

2. Обчислити значення виразів:

$$\frac{l}{g^2}, \text{ при } l = -1,3; g = 2,1;$$
$$\pi r^2 - 4a^2, \text{ при } r = 5; a = 1,2.$$

3. Визначити значення функції $f(x)$ при $x = 1,2$. Побудувати таблицю значень функції для $x \in [3, 9]$ з кроком 1. Побудувати графік функції, якщо

$$f(x) = \frac{x^3 - 27x + 54}{x^3};$$
$$f(x) = (x + 4)e^{-x-3}.$$

4. Спростити вирази:

$$\left(\frac{1}{a+9} - \frac{1}{a-9}\right) : \frac{3}{a+9};$$
$$5a + \frac{a^2 - 3a}{4a} \cdot \frac{8a}{a-3}.$$

5. Розв'язати кожне рівняння двома способами:

$$x^5 + x^4 - 7x^3 - 7x^2 - 18x - 18 = 0;$$
$$4^x + 6^x = 2 \cdot 9^x.$$

4 варіант

1. Обчислити значення числових виразів:

$$8\frac{1}{2} \cdot \frac{7}{14};$$

$$\frac{4}{5} - 2,5.$$

2. Обчислити значення виразів:

$$r^3t - b, \text{ при } r = -0,2; t = 2; b = -1,5;$$

$$\frac{g^2a - 3}{4g}, \text{ при } g = -1,2; a = -1,67.$$

3. Визначити значення функції $f(x)$ при $x = 0,2$. Побудувати таблицю значень функції для $x \in [3, 10]$ з кроком 1. Побудувати графік функції, якщо

$$f(x) = \frac{5x}{x^2 + 3};$$

$$f(x) = (2x + 4)e^{2(x+2)}.$$

4. Спростити вирази:

$$\frac{a^2 + 4a}{3} \cdot \frac{6}{a + 4} - 3;$$

$$\left(\frac{1}{a + 9} - \frac{1}{a - 9}\right) : \frac{3}{a + 9}.$$

5. Розв'язати кожне рівняння двома способами:

$$3^{x+1} + 3^x + 3^{x-1} = 39;$$

$$\sqrt{5x - 1} - \sqrt{3x - 2} - \sqrt{x - 1} = 0.$$

5 варіант

1. Обчислити значення числових виразів:

$$3\frac{1}{11} + \frac{1}{3};$$

$$\frac{2}{3} \div \frac{8}{9}$$

2. Обчислити значення виразів:

$$z^3 + \frac{2a}{z}, \text{ при } a = -6,8; z = 1,5;$$

$$\frac{5}{3}s^2 + a, \text{ при } s = 4,15; a = -3.$$

3. Визначити значення функції $f(x)$ при $x = 0,8$. Побудувати таблицю значень функції для $x \in [4, 10]$ з кроком 1. Побудувати графік функції, якщо

$$f(x) = \frac{x^3 - 27x + 54}{x^3};$$

$$f(x) = (x + 4)e^{-x-3}.$$

4. Спростити вирази:

$$\frac{a^2 - 16}{a} \cdot \frac{1}{a + 4} - \frac{a + 4}{a}$$

$$\left(\frac{1}{a - 1} - \frac{1}{a + 1} \right) : \frac{2}{a + 1}$$

5. Розв'язати кожне рівняння двома способами:

$$\sqrt{x - 1} - \sqrt{2x + 5} + \sqrt{x + 2} = 0;$$

$$x^5 + 2x^4 - 13x^3 - 26x^2 + 36x + 72 = 0.$$

ТЕМА 2. СПРОЩЕННЯ ТА ОБЧИСЛЕННЯ ВИРАЗІВ ІЗ ВИКОРИСТАННЯМ CAS GEOGEBRA (COMPUTER ALGEBRA SYSTEM, СИСТЕМА КОМП'ЮТЕРНОЇ АЛГЕБРИ)

Список рекомендованих джерел:

1. Практикум з опанування пакету динамічної математики GeoGebra як інструменту реалізації STEAM-освіти : навч. посібник / Л. Е. Гризун та ін. ; дар. В. В. Пікалова . Харків : ХНПУ, 2018. 80 с. URL : <https://goo.su/1Nlt>.

2.1 Теоретичні відомості

Для переходу до Ска Необхідно вибрати Вид /СКА (див. рис. 2.1).

Виникнення програми

Програма GeoGebra виникла в 2002 році як дипломний магістерський проект Маркуса Хохенватера під час його навчання в університеті Зальцбурга.

GeoGebra перетворилась на міжнародний проект з відкритим кодом, що активно розвивається і над яким зараз працює інтернаціональна команда з 20 розробників та більше ніж 100 перекладачів

СДМ GeoGebra — це вільний педагогічний програмний продукт, призначений для вивчення і викладання математики в середніх і вищих навчальних закладах, який поєднує динамічну геометрію, алгебру, математичний аналіз і статистику.

View

- Правка
- Модулі
- Вид
- Алгебра
- СКА
- Полотно
- Полотно 2
- Полотно 3D
- Таблиця
- Калькулятор Ймовірнос
- Протокол побудови
- Рядок вводу
- Панель Навігації
- Оновити
- Обчислити заново
- Налаштування
- Інструменти
- Допомога & Зв'язок

Рис. 2.1

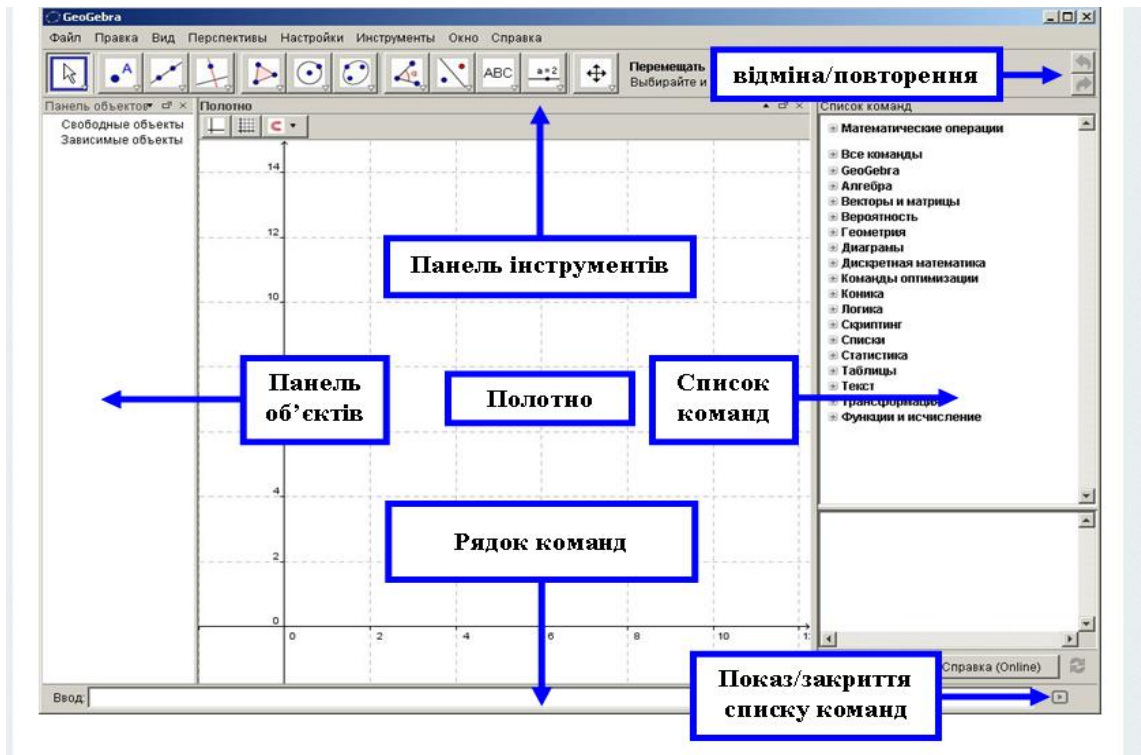


Рис. 2.2

Компонент GeoGebra CAS – зручний спосіб працювати зі складними рівняннями і многочленами. Він являє собою окрему область, в яку построчно вводяться вирази для обробки. Кожний рядок містить вихідний математичний вираз, назву здійсненої над ним операції і його результат. CAS взаємодіє з іншими компонентами пакету, і у випадку, якщо оброблюваний вираз може бути відображено графічно, під номером рядка відображається кнопка видимості. Якщо користувач відображає об'єкт, йому автоматично присвоюється потрібне ім'я, і він відображається на полотні і в панелі об'єктів. Наприклад, побудова простої квадратичної параболи через CAS буде виглядати так (див. рис. 2.3):

4	$y=x^2$	4	$d:=y = x^2$
	$\rightarrow y = x^2$		$\rightarrow y = x^2$

Рис. 2.3

CAS зручно використовувати для спрощення виразів. При цьому необхідно дотримуватися правил введення математичних виразів на алгоритмічній мові, а особливо враховувати порядок дужок. Наприклад, введення і спрощення наступних виразів буде виглядати так:

$\left(\frac{a-2}{a+2} - \frac{a+2}{a-2}\right) \div \frac{12a^2}{4-a^2};$	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> <p>1</p> <p>$((a-2)/(a+2)-(a+2)/(a-2))/(12*a^2/(4-a^2))$</p> <p>→ $\frac{2}{3a}$</p> </div>
$(y-2)(y+3) - (y-1)^2 + (5-y)(y+5);$	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> <p>2</p> <p>$(y-2)(y+3)-(y-1)^2+(5-y)(y+5)$</p> <p>→ $-y^2 + 3y + 18$</p> </div>

Рис. 2.4

При підтвердженні введення виразу кнопкою Enter CAS автоматично виконує доступні спрощення. Щоб здійснити іншу дію, необхідно обрати один із запропонованих інструментів. Для представлення числа у вигляді десяткового дробу також є спеціальний інструмент. Нижче наведений приклад розв'язання рівняння з двома можливими коренями:

$3x^2 - x - 2 = 81$	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> <p>5</p> <p>$3^x(x^2 - x - 2) = 81$</p> <p>○ Решить: $\{x = -2, x = 3\}$</p> </div>
---------------------	--

Рис. 2.5

Можливості програмного середовища при вивчення алгебри та початків аналізу:

- ✓ обчислення значення виразів;
- ✓ спрощення дробово-раціональних виразів;
- ✓ розкладання на множники многочленів;
- ✓ розкладання на прості множники числа;
- ✓ знайдення НСД і НСК декількох чисел;
- ✓ побудова графіків функцій і рівнянь, заданих аналітично;

- ✓ графічне розв'язування рівнянь і їх систем;
- ✓ знаходження координат точок перетину графіків двох функцій на заданому проміжку;
- ✓ графічне розв'язування нерівностей і їх систем;
- ✓ побудова дотичної і нормалі до графіка функції у заданій точці з одночасним знаходженням їх рівнянь;
- ✓ трасування графіка, побудова таблиці значень;
- ✓ дослідження функції на даному проміжку (відшукування найбільших і найменших значень, екстремум, довжина кривої, нулі функції, точки перегину (для поліномів));
- ✓ виконання чисельного інтегрування і його геометрична ілюстрація;
- ✓ знаходження первісної, похідної функції та побудова їх графіків.

2.2 Приклади виконання завдань

1. Розкласти число на прості множники. Розкласти вираз на множники.

Розкрити дужки. Щоб вираз розкласти на множники, вводимо його і

натискаємо на «розкласти» $\frac{15}{3 \cdot 5}$, якщо необхідно розкрити дужки, то

натискаємо на «розкрити» $(())$. Аналогічно числа розкладаються на прості множники (див. рис. 2.6).

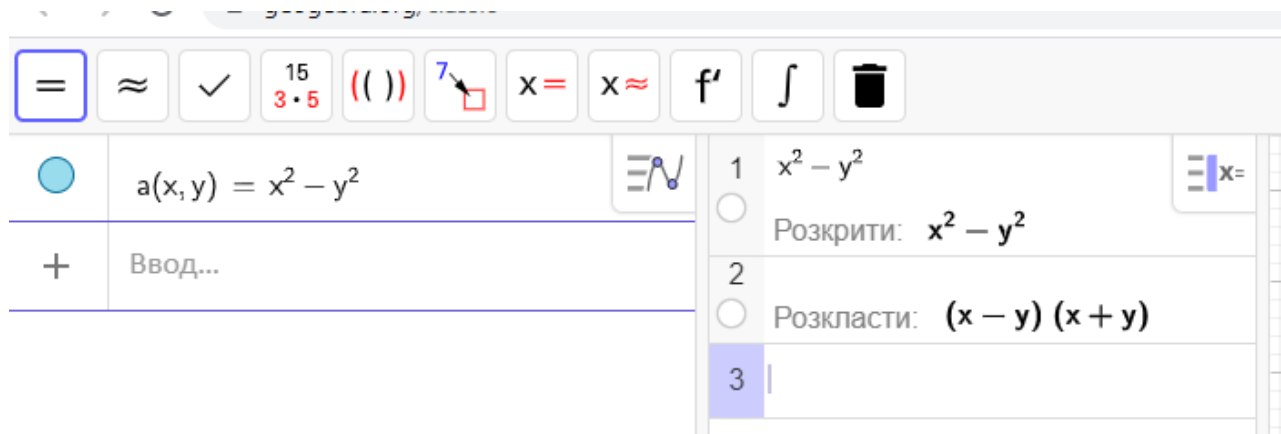


Рис. 2.6

2. Знаходження найбільшого спільного дільника на найменшого спільного кратного. Для того щоб знайти НСК, НСД двох чисел вводимо на клавіатурі НСК і вводимо потрібні числа.



Рис. 2.7

3. Спростити вираз. Щоб спростити вираз, набираємо його та натискаємо дорівнює:

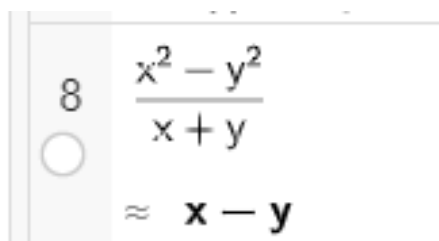


Рис. 2.8

4. Знаходження невизначеного інтегралу, обчислення визначеного інтегралу.

За допомогою CAS GeoGebra можна також обчислювати визначений та невизначений інтеграли. Невизначений інтеграл є на панелі інструментів, а для обчислення визначеного необхідно ввести «інтеграл» і обрати потрібну операцію. В першому випадку обчислено інтеграл:

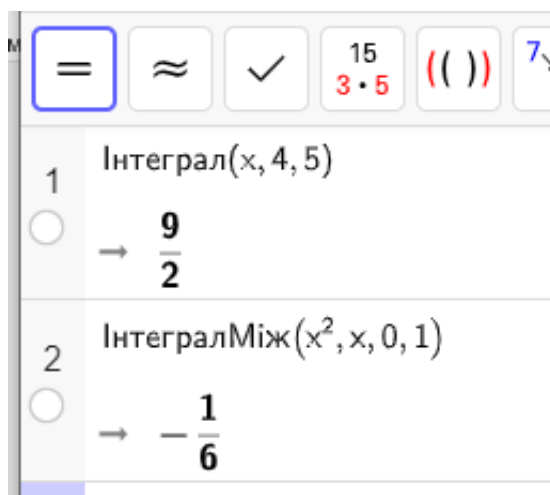


Рис. 2.9

$$\int_4^5 x dx = 4,5.$$

У другому прикладі обчислено інтеграл між функціями, тобто

$$\int_0^1 (x^2 - x) dx = \frac{1}{6}.$$

5. Мода вибірки. Для того щоб знайти моду вибірки необхідно починати вводити команду «мода» і ввести необхідні дані через кому. Натиснути «Enter» (див. рис. 2.10).

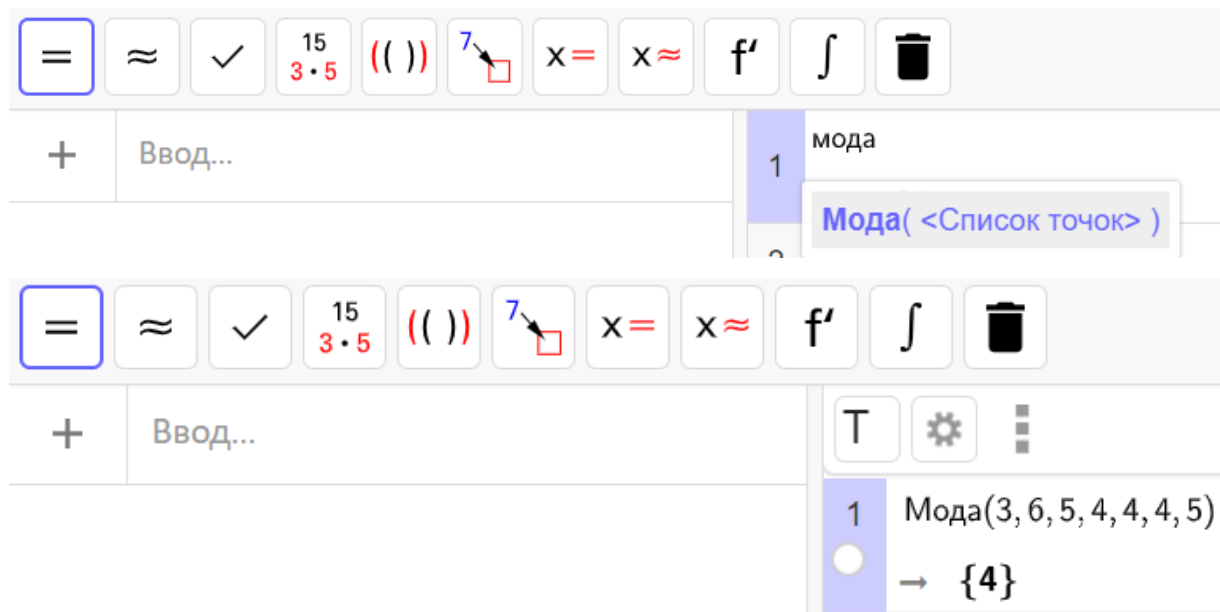


Рис. 2.10

6. Середнє арифметичне, середнє геометричне. Для того щоб знайти середнє арифметичне (mean), середню геометричне необхідно починати вводити команду «середнє» і ввести необхідні дані через кому. Натиснути «Enter» (див. рис. 2.11-2.12).

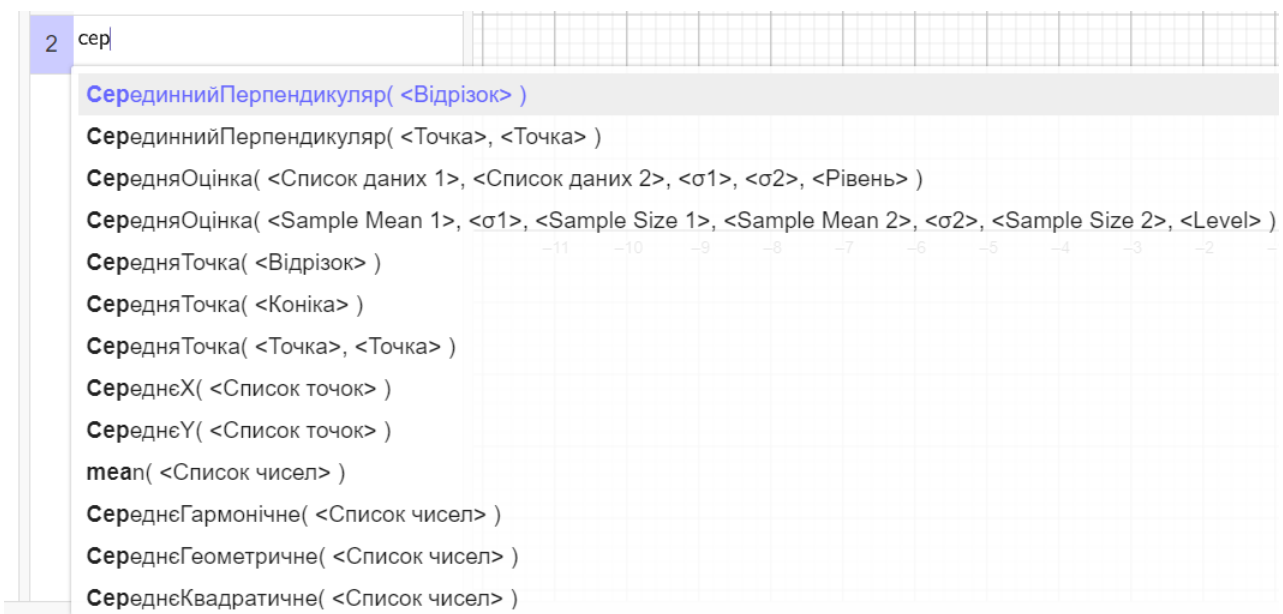


Рис. 2.11



Рис. 2.12

7. Медіана. Для того щоб знайти медіану необхідно починати вводити команду «медіана» і ввести необхідні дані через кому. Натиснути «Enter». (див. рис. 2.13).

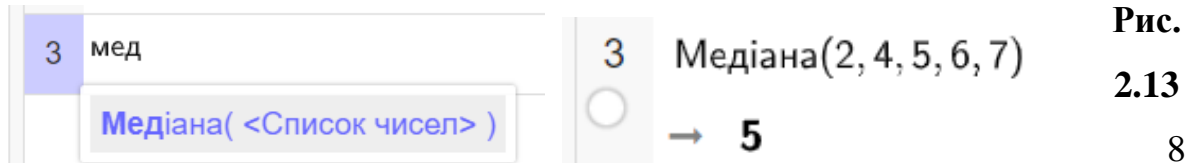


Рис. 2.13

8.

Похідна функції. Для того щоб знайти похідну функції необхідно записати функцію та натиснути на панелі інструментів знак похідної (рис. 2.14).

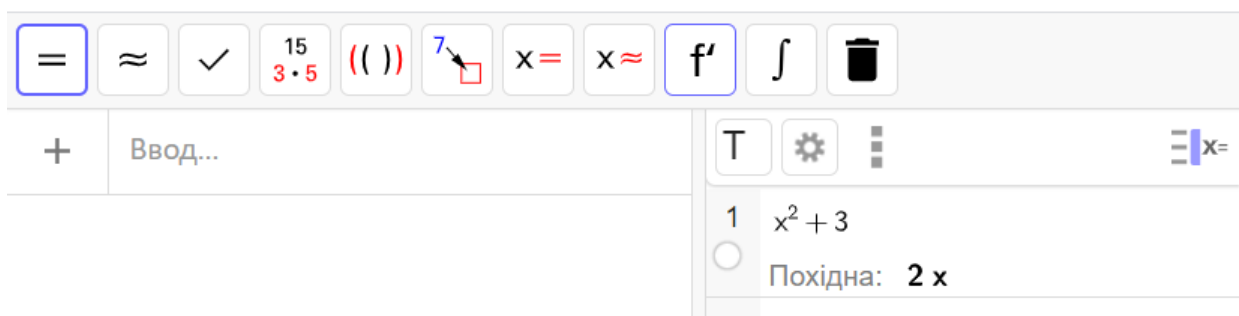


Рис. 2.14

Або починати вводити команду «Похідна» і ввести необхідні дані. Натиснути «Enter». Завдяки цьому способу можна також відразу знаходити значення похідної у точці (див. рис. 2.15).

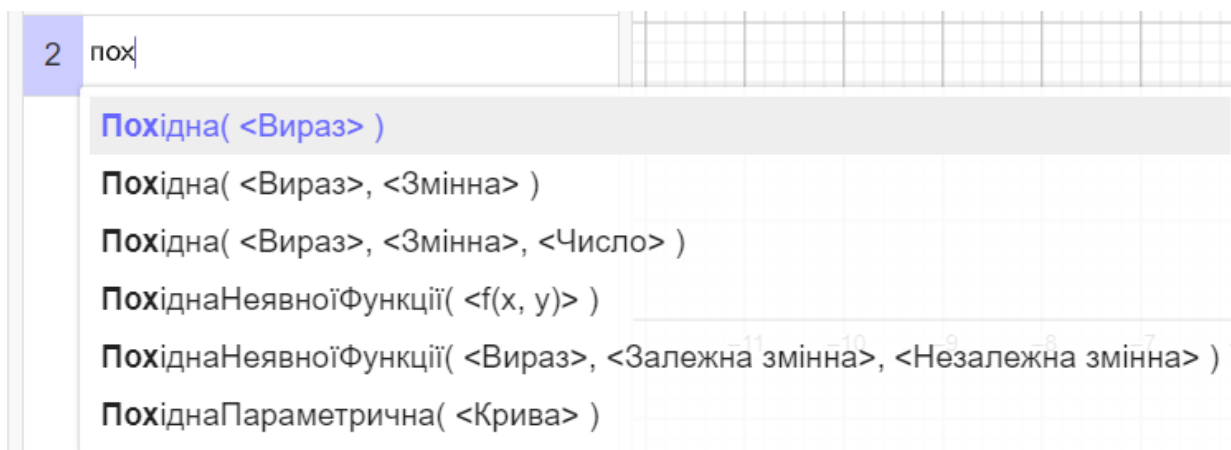


Рис. 2.15

10. Розв'язати рівняння. Для того щоб знайти корені рівняння необхідно його записати та натиснути на панелі інструментів знак «x=» (див. рис. 2.16).



Рис. 2.16

11. Перевести в іншу систему числення. Для того щоб число перевести в іншу систему числення необхідно починати вводити команду «перевУ Систему» і ввести спочатку число, а потім основу нової системи числення. Натиснути «Enter» (див. рис. 2.17).

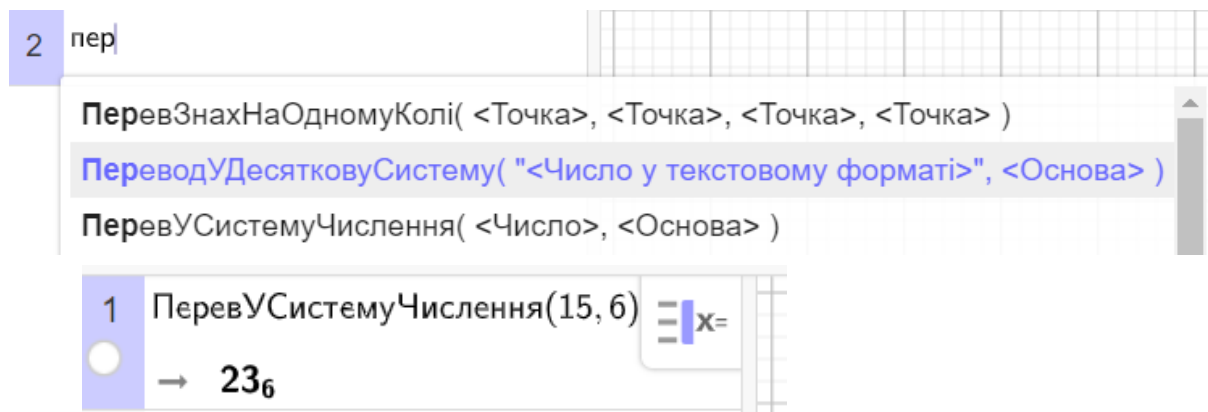


Рис. 2.17

2.3 Індивідуальні завдання

Варіант 1.

1. НСК (72,78), НСК (172,79).
2. НСД (66, 560), НСД (166, 130).
3. Розкласти на прості множники числа 45673, 6666.
4. Спростити вирази:

$$5a - \frac{a^2 + 3a}{4a} \cdot \frac{8a}{a + 3}$$
$$\frac{a^2 + 4a}{3} \cdot \frac{6}{a + 4} - 3$$

5. Обчислити $\int_1^5 (3x + 2)dx$, $\int_0^1 (x^2 - x)dx$.
6. Обчислити $\int (x^4 - 2x^2)dx$.
7. Розкрити дужки $(3x-5)(0,5x+3)(12x+8)(4-x)$.
8. Обчислити похідну функції:

$$y = \frac{3x + 2}{6x - 1}$$

9. Обчислити похідну функції у тойці $x_0 = 5$:

$$y = \frac{-3x + 12}{x + 1}$$

10. Знайти корені рівнянь

$$x^5 + x^4 - 4x^3 - 4x^2 - 45x - 45 = 0;$$

$$2^x \cdot 3^{x+1} = 108.$$

11. Знайти середнє геометричне чисел (25, 36), (4, 9, 16).
11. Знайти Моду вибірки (5, 6, 7, 6, 9, 5), (3, 7, 9, 6, 7, 9, 10).
12. Знайти медіану чисел (3, 4, 6, 8, 10), (4, 4, 5, 5, 9).
13. Виконати ділення многочленів

$$\frac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2}$$

14. Перевести число 13 у систему числення з основою 5. (команда `перевУСистемуЧислення`).

Варіант 2.

1. НСК (352,768), НСК (10072,769).
2. НСД (6608, 56080), НСД (16806, 13760).
3. Розкласти на прості множники числа 1111111, 6786786.
4. Спростити вирази:

$$\left(\frac{1}{a+9} - \frac{1}{a-9}\right) : \frac{3}{a+9};$$
$$5a + \frac{a^2 - 3a}{4a} \cdot \frac{8a}{a-3}.$$

5. Обчислити $\int_1^3 (-6x - 2)dx$, $\int_0^4 (2x^2 - 4x)dx$.
6. Обчислити $\int (6x^4 - 12x^2)dx$.
7. Розкрити дужки $(13x-5)(13x+5)(12x+1,8)(0,4-2x)$.
8. Обчислити похідну функції:

$$y = \frac{3(x+2)}{6x-6}.$$

9. Обчислити похідну функції у тойці $x_0 = 15$:

$$y = \frac{-0,3x + 1,2}{x + 10}.$$

10. Знайти корені рівнянь

$$\sqrt{x-1} - \sqrt{2x+5} + \sqrt{x+2} = 0;$$
$$x^5 + 2x^4 - 13x^3 - 26x^2 + 36x + 72 = 0.$$

11. Знайти середнє геометричне чисел (4, 100), (1, 4, 9).
11. Знайти Моду вибірки (5, 6, 6, 6, 5, 5), (3, 4, 7, 16, 7, 9, 3, 10).
12. Знайти медіану чисел (1, 2, 13, 4, 50), (14, 14, 15, 15, 9).
13. Виконати ділення многочленів

$$\frac{5x^{10} - 5y^{10}}{x^5 + y^5}.$$

14. Перевести число 27 у систему числення з основою 7. (команда перевУСистемуЧислення).

Варіант 3.

1. НСК (12,80), НСК (72,70).
2. НСД (1680, 560), НСД (806, 760).
3. Розкласти на прості множники числа 123456, 654321.
4. Спростити вирази:

$$\frac{a^2 - 16}{a} \cdot \frac{1}{a + 4} - \frac{a + 4}{a};$$
$$\left(\frac{1}{a - 1} - \frac{1}{a + 1} \right) : \frac{2}{a + 1}.$$

5. Обчислити $\int_1^4 (-6x + 3)dx$, $\int_4^5 (8x^2 - 6x)dx$.
6. Обчислити $\int (14x^6 - 18x^5)dx$.
7. Розкрити дужки $(13x-5)(13x+5)(12x+1,8)(0,4-2x)$.
8. Обчислити похідну функції:

$$y = \frac{3(x + 2)}{6x - 6}.$$

9. Обчислити похідну функції у тойці $x_0 = 2$

$$y = \frac{2x - 2}{x - 1}.$$

10. Знайти корені рівнянь

$$3^{x+1} + 3^x + 3^{x-1} = 39;$$

$$\sqrt{5x - 1} - \sqrt{3x - 2} - \sqrt{x - 1} = 0.$$

11. Знайти середнє геометричне чисел (4, 81), (12, 27, 16).
11. Знайти Моду вибірки (5, 6, 17, 6, 19, 5), (3, 4, 9, 16, 7, 9, 3, 10).
12. Знайти медіану чисел (1, 2, 3, 4, 50), (4, 14, 5, 15, 9).
13. Виконати ділення многочленів

$$\frac{2x^8 - 2y^8}{x^4 + y^4}.$$

14. Перевести число 17 у систему числення з основою 6. (команда перевУСистемуЧислення).

Варіант 4.

1. НСК (16,66), НСК (73,70).
2. НСД (68680, 5060), НСД (826, 1560).
3. Розкласти на прості множники числа 919191, 100000.
4. Спростити вирази:

$$\frac{a-5}{a} - \frac{a^2+25}{a} \cdot \frac{1}{a-5};$$
$$7a - \frac{a^2+a}{5} \cdot \frac{10}{a+1}.$$

5. Обчислити $\int_1^3 (-x+13)dx$, $\int_4^5 (5x^4-5x)dx$.
6. Обчислити $\int (16x^3-12x^5)dx$.
7. Розкрити дужки $(13x-5)(13x+5)(20x+1,8)(1,8-20x)$.
8. Обчислити похідну функції:

$$y = \frac{3(x+2)}{6x-6}.$$

9. Обчислити похідну функції у тойці $x_0 = 5$

$$y = \frac{20x-2}{x-4}.$$

10. Знайти корені рівнянь

$$5^{x+1} + 5^x + 5^{x-1} = 155;$$
$$\sqrt{15x-1} - \sqrt{8x-2} = 0.$$

11. Знайти середнє геометричне чисел (36, 81), (5, 15, 75).
11. Знайти Моду вибірки (5, 6, 9, 9, 6, 6, 5), (3, 4, 9, 3,7,4, 7, 9, 3, 10).
12. Знайти медіану чисел (1, 12, 13, 4, 50), (4, 14, 15, 15, 9).
13. Виконати ділення многочленів

$$\frac{9x^2-4y^2}{3x^1+2y^1}.$$

14. Перевести число 77 у систему числення з основою 8. (команда перевУСистемуЧислення).

Варіант 5.

1. НСК (56,16), НСК (18,63).
2. НСД (55555, 888), НСД (3435, 1560).
3. Розкласти на прості множники числа 999999, 4856720.
4. Спростити вирази:

$$5a - \frac{a^2 + 3a}{4a} \cdot \frac{8a}{a + 3};$$

$$\frac{a^2 + 5a}{3} \cdot \frac{6}{a + 5} - 3.$$

5. Обчислити $\int_1^3 (-5x + 1)dx$, $\int_4^7 (5x^4 + 15x)dx$.
6. Обчислити $\int (28x^3 - 4x^5)dx$.
7. Розкрити дужки $(6x - 5)(12x + 10)(10x + 8)(8 - 10x)$.
8. Обчислити похідну функції:

$$y = \frac{3x + 6}{x}.$$

9. Обчислити похідну функції у тойці $x_0 = 45$

$$y = \frac{x - 12}{6x - 4}.$$

10. Знайти корені рівнянь

$$x^5 + x^4 - 7x^3 - 7x^2 - 18x - 18 = 0;$$

$$4^x + 4^{x+2} = 68.$$

11. Знайти середнє геометричне чисел (16, 121), (12, 15, 60).
11. Знайти Моду вибірки (1, 6, 8, 9, 6, 6, 7, 5), (3, 9, 3,7, 4, 7, 9, 3, 10).
12. Знайти медіану чисел (1, 11, 3, 4, 50), (4, 14, 15, 13, 9).
13. Виконати ділення многочленів

$$\frac{30x^5 - 30y^5}{20x^{10} + 20y^{10}}.$$

14. Перевести число 66 у систему числення з основою 6. (команда перевУСистемуЧислення).

ТЕМА 3. СТВОРЕННЯ ДИНАМІЧНИХ МОДЕЛЕЙ, СПРЯМОВАНИХ НА ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЙ. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ РІВНЯНЬ ТА ЇХ СИСТЕМ ЗАСОБАМИ GEOGEBRA

Список рекомендованих джерел:

1. Інноваційні інформаційно-комунікаційні технології навчання математики : навч. посіб. / Т. Г. Крамаренко, В. В. Корольський, С. О. Семеріков, С. В. Шокалюк; наук. ред. М. І. Жалдак. Кривий Ріг : Криворізький держ. пед. ун-т, 2019. 444 с. URL : <http://elibrary.kdpu.edu.ua/handle/123456789/3315>.
2. Практикум з опанування пакету динамічної математики GeoGebra як інструменту реалізації STEAM-освіти : навч. посібник / Л. Е. Гризун та ін. ; дар. В. В. Пікалова . Харків : ХНПУ, 2018. 80 с. URL : <https://goo.su/1Nlt>.

3.1 Теоретичні відомості

1. Графік функції – це геометричне місце точок площини (ГМТ), абсциси (x) і ординати (y) яких пов'язані заданою функцією. Точка з координатами (x, y) знаходиться на графіку функції f тоді, коли $y = f(x)$. Вивчення властивостей функцій та їх графіків займає значне місце в шкільній математиці і в подальших курсах. Ця тема вивчається не тільки в курсах математичного та функціонального аналізу та в інших розділах вищої математики, але й у більшості вузько професійних предметів, наприклад, в економіці.

Всі графіки функцій мають певні характеристики:

Область визначення функції, область значень функції, нулі функції, монотонність функції, парність/непарність функції, періодичність функції, вгнутість, опуклість функції, точки перегину, асимптоти.

В GeoGebra є два способи створення графіка функції.

Перший – через спеціальну команду Функція [\langle Функція \rangle , \langle Початкове значення \rangle , \langle Кінцеве значення \rangle], яка передбачає надання області визначення. Є також команда для функції з двома змінними, також із зазначенням області визначення для кожної функції.

Другий, більш простий і швидкий спосіб – введення функції через командний рядок. Наприклад, в результаті введення виразу $y=3x+6$ буде створена пряма з присвоєним їй новим ім'ям (див. рис. 3.1).

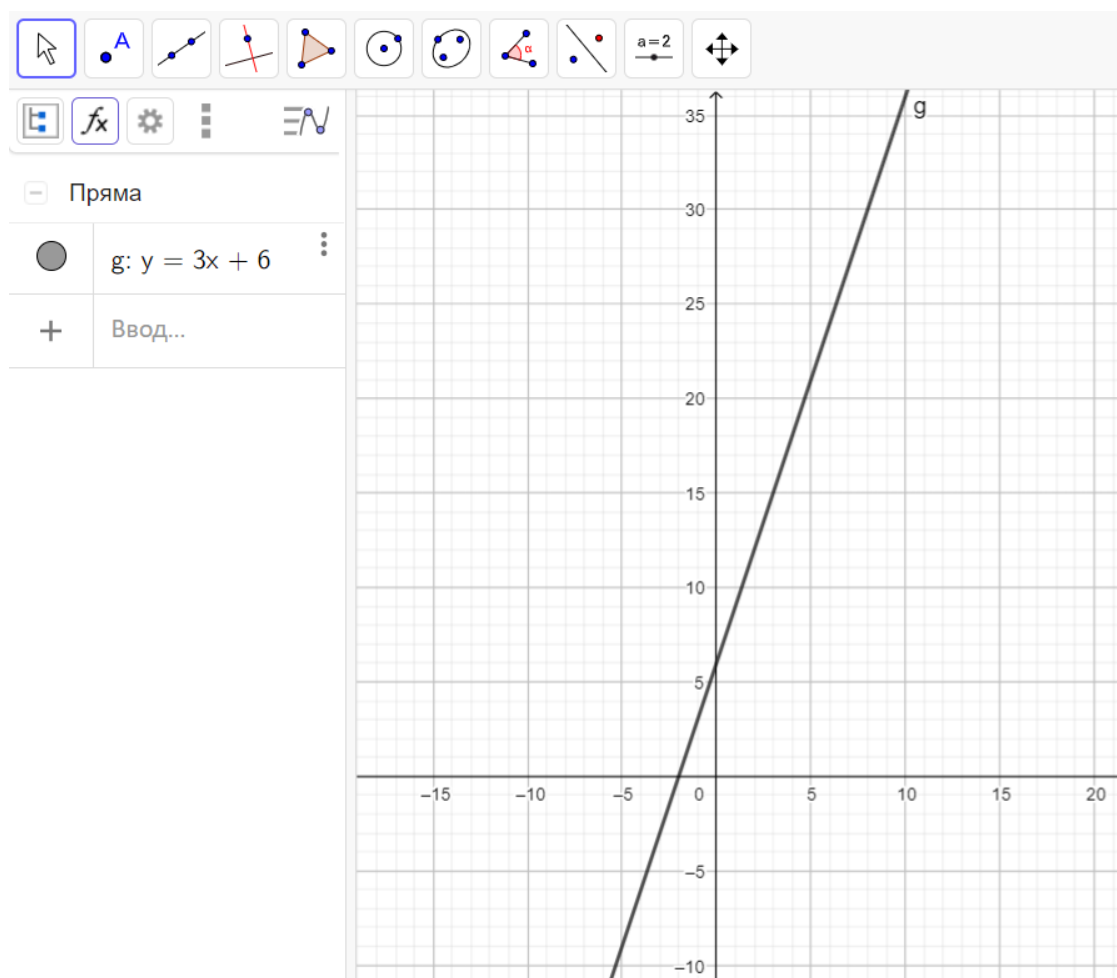


Рис. 3.1

Для побудови динамічної моделі функції необхідно виконати кроки:

- створити слайдер;
- в командному рядку записати функцію з використанням слайдера.

Змінюючи значення слайдера, змінюються властивості функції.

Створити динамічну модель та дослідити функцію.

Приклад 1. Дослідити властивості функції $y = ax^2$.

У командному рядку введемо функцію, відразу з'являється слайдер (повзунок), рухаючи який, змінюється значення параметра a (див. рис. 3.2).

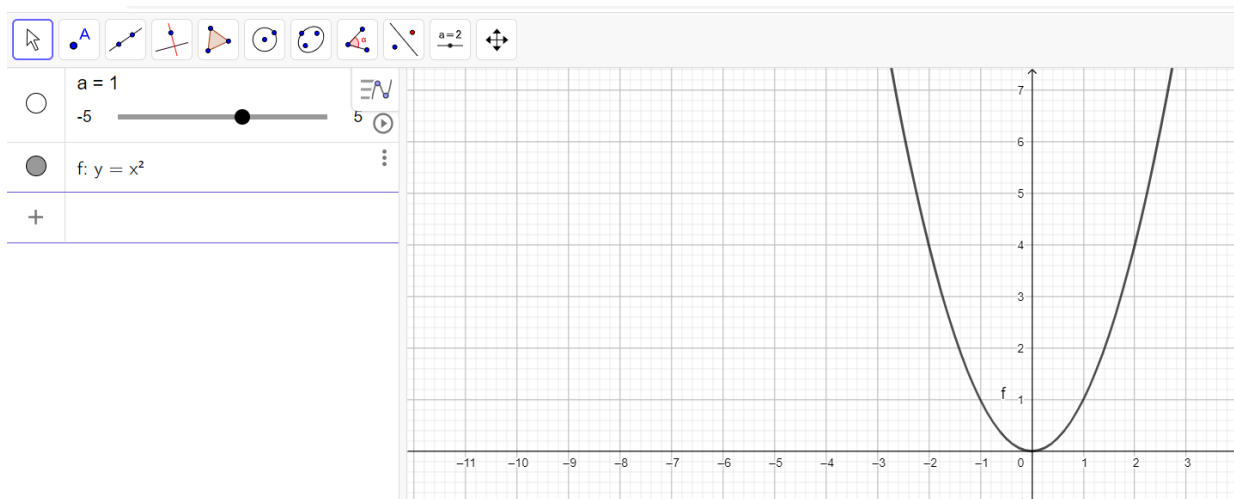


Рис. 3.2

При $a = 5$, функція $y = ax^2$ стала стиснутою до точки $(0;0)$ вздовж осі OX (див. рис. 3.3).

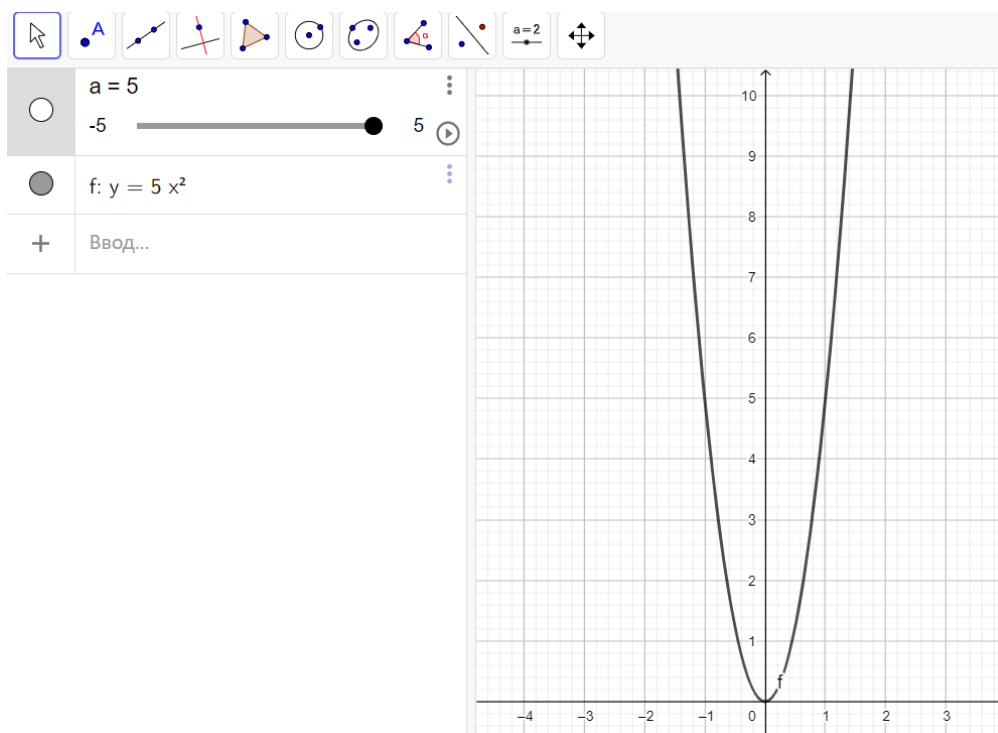


Рис. 3.3

При $a = 0,5$, функція $y = ax^2$ стала розтягнутою від точки $(0;0)$ вздовж осі OX . див. рис. 3.4).

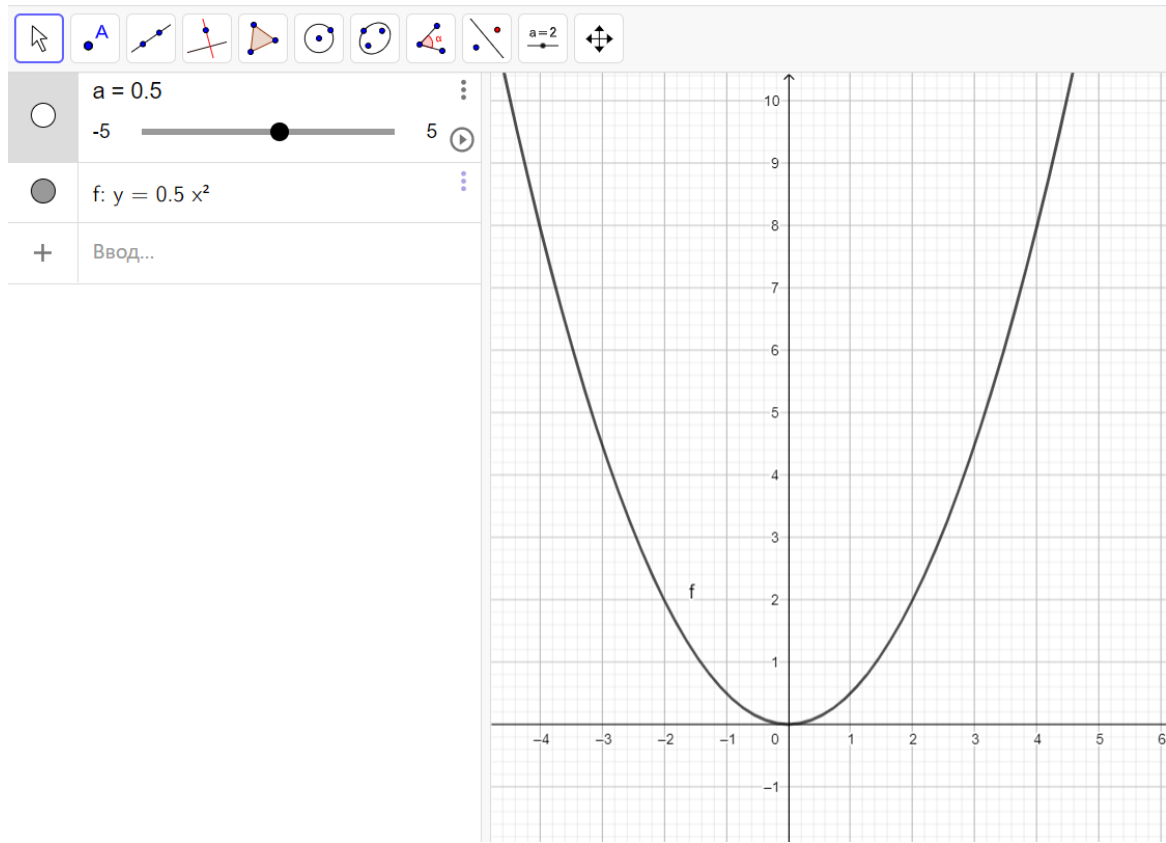


Рис. 3.4

При $a = -0,5$, функція $y = ax^2$ стала розтягнутою від точки $(0; 0)$ вздовж осі OX , але вітки направлені донизу (див. рис. 3.5).

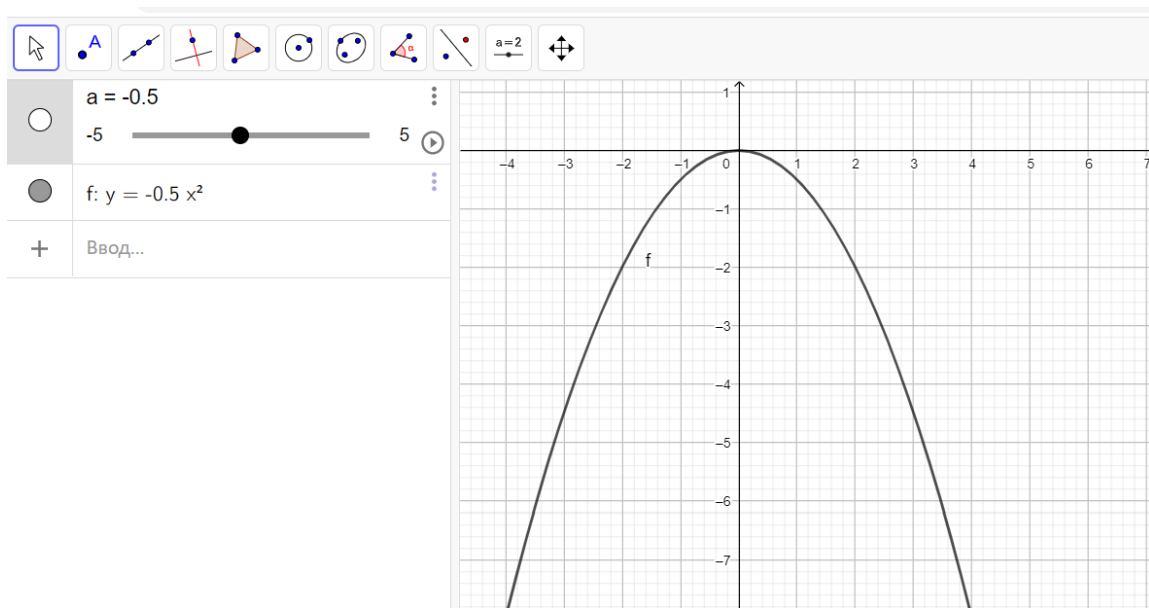


Рис. 3.5

При $a = -5$, функція $y = ax^2$ стала стиснутою до точки $(0;0)$ вздовж осі OX , вітки направлені донизу (див. рис. 3.6).

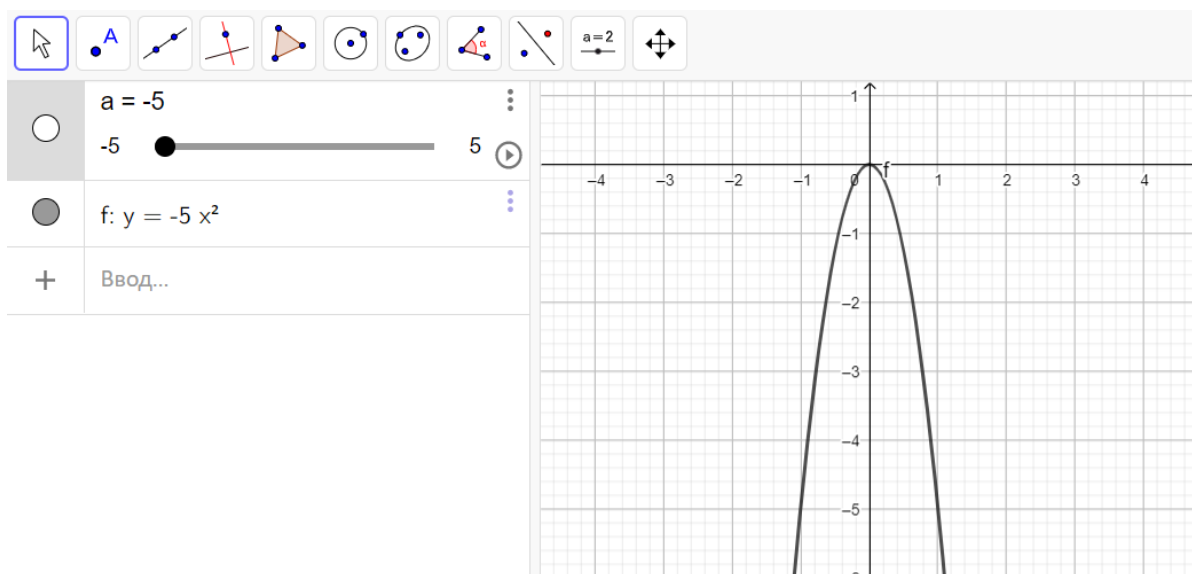


Рис. 3.6

При $a = 0$, функція $y = ax^2$ стала прямою, яка співпадає з віссю OX (див. рис. 3.7).

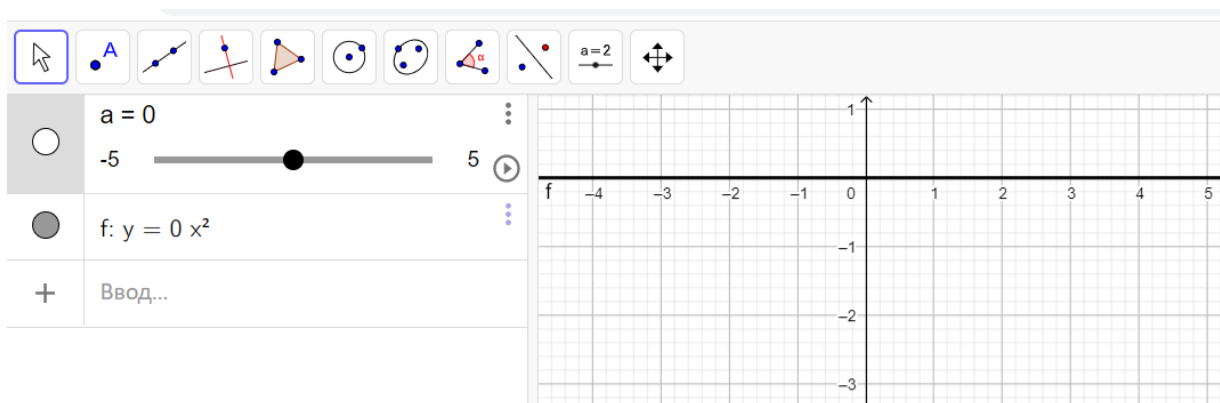


Рис. 3.7

Отже, при $a \in (0; +\infty)$ вітки параболи напрямлені вгору;

при $a \in (-\infty; 0)$ вітки параболи напрямлені униз;

при $a \in (-1; 0)$ та $(0; 1)$ функція стає розтягнутою від точки $(0; 0)$ вздовж осі OX ;

при $a \in (-\infty; -1)$ та $(1; \infty)$ функція стає стиснутою до точки $(0; 0)$ вздовж осі OX ;

при $a = 1$ це звичайна парабола, при $a = -1$, її вітки направлені донизу, при $a = 0$, функція співпадає з віссю абсцис.

Графічний метод розв'язування рівнянь, систем рівнянь.

За допомогою середовища GeoGebra зручно розв'язувати системи рівнянь, рівняння з параметрами та визначати кількість коренів рівняння (див. рис. 3.8).

Приклад 2. Визначити кількість коренів рівняння в залежності від значень параметра a (див. рис. 3.8).

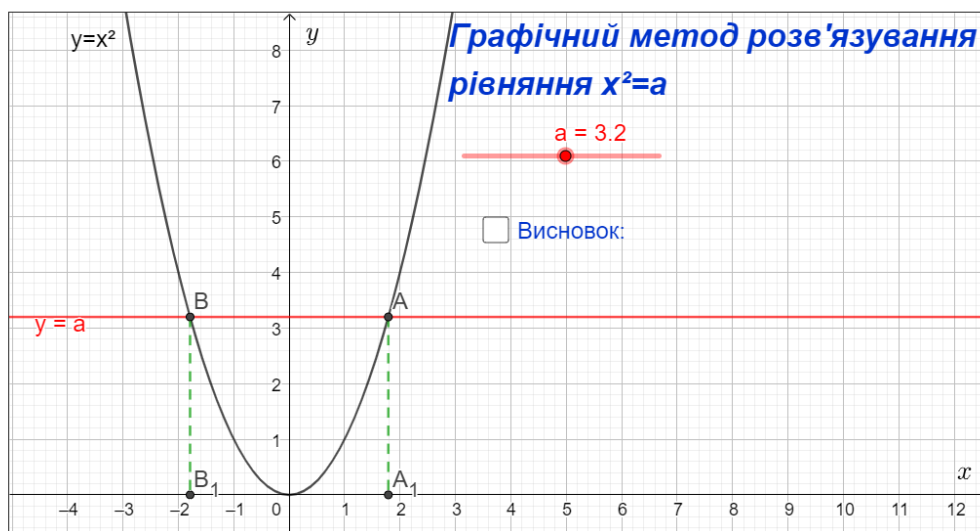


Рис. 3.8

Відповідь: при $a > 0$, 2 кореня; при $a = 0$, 1 корінь; при $a < 0$, немає коренів.

3.2 Приклади виконання завдань

1. Побудувати функцію та дослідити її властивості.

$$y = \sqrt{x^2 - 4}.$$

- ✓ Вводимо функцію у командному рядку (див. рис. 1.3.9).
- ✓ За графіком функції запишемо властивості функції:
- ✓ $D(y) : x \in (-\infty; -2]$ та $[2; +\infty)$.
- ✓ $E(y) : y \in$ та $[0; +\infty)$.
- ✓ $y(-x) = y(x)$, отже функція є парною.
- ✓ Функція спадає на проміжку $(-\infty; -2]$, зростає на проміжку $[2; +\infty)$.
- ✓ Перетин з осями координат (нулі функції): $(-2; 0)$, $(2; 0)$.

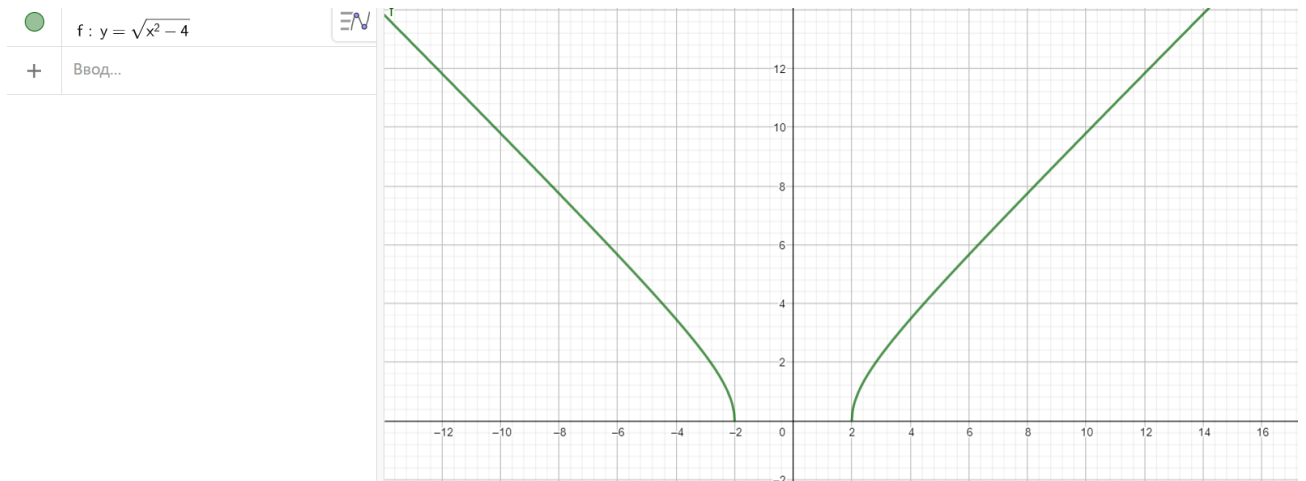
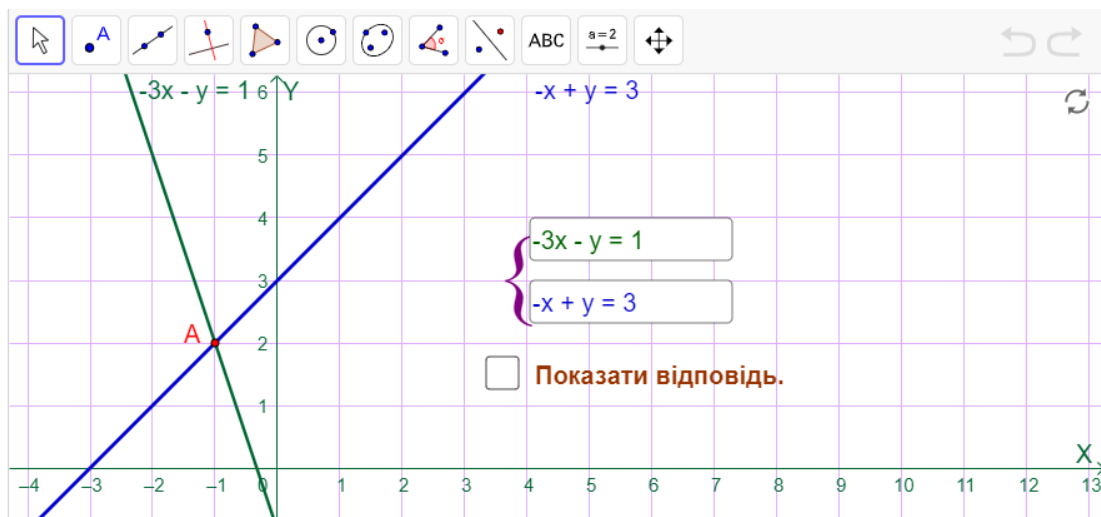


Рис. 3.9

2. Розв'язати графічно систему рівнянь:

$$\begin{cases} -3x - y = 1 \\ -x + y = 3 \end{cases}$$

Рис. 3.9



Відповідь: $(-1; 2)$.

3. Визначити кількість коренів рівняння $x^9 - 4x^8 - x^3 + x^2 = 0$.

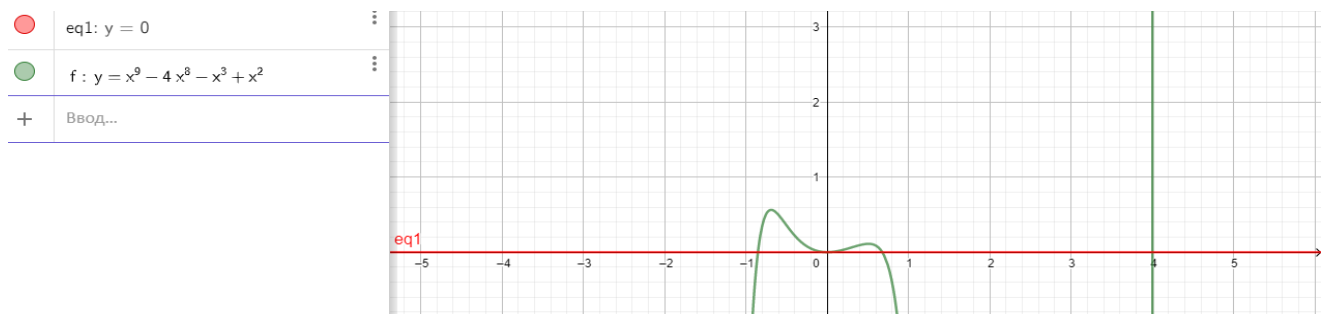


Рис. 3.10

Відповідь: 4 кореня.

3.3 Індивідуальні завдання

Варіант 1.

1. Зробити динамічну модель (з використанням слайдерів), яка демонструє властивості логарифмічної функції.

2. Побудувати функцію та дослідити її властивості.

$$y = \sqrt{|x^2 - 5x|}.$$

3. Розв'язати графічно систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2x^2 - 12 = y \\ 2x^2 - 3y = 5 \end{cases}$$

4. Визначити кількість коренів рівняння $-3x^5 + 20x^4 - x^2 + 5x = 0$.

Варіант 2.

1. Зробити динамічну модель (з використанням слайдерів), яка демонструє властивості степеневої функції.

2. Побудувати функцію та дослідити її властивості.

$$y = \sqrt{|-8x + 16|}.$$

3. Розв'язати графічно систему рівнянь:

$$\begin{cases} 5y = 2x^2 - 2 \\ -2x^2 - 3y = -3 \end{cases}$$

4. Визначити кількість коренів рівняння $x^5 + 6x^2 - 4x = 0$.

Варіант 3.

1. Зробити динамічну модель (з використанням слайдерів), яка демонструє властивості показникової функції.

2. Побудувати функцію та дослідити її властивості.

$$y = |e^{2x-1} + 3x|.$$

3. Розв'язати графічно систему рівнянь:

$$\begin{cases} 6x + 3y = 10 \\ y = |x + 4| \end{cases}.$$

4. Визначити кількість коренів рівняння $3x^5 - 4x^3 + 6x^2 = 0$.

Варіант 4.

1. Зробити динамічну модель (з використанням слайдерів), яка демонструє властивості квадратичної функції.

2. Побудувати функцію та дослідити її властивості.

$$y = \sqrt{\sin x}.$$

3. Розв'язати графічно систему рівнянь:

$$\begin{cases} x^2 - 6x = y \\ 2y^2 = 5x \end{cases}.$$

4. Визначити кількість коренів рівняння $3x^5 + 4x^3 + 6x^2 + 5x = 0$.

Варіант 5.

1. Зробити динамічну модель (з використанням слайдерів), яка демонструє властивості синусоїди.

2. Побудувати функцію та дослідити її властивості.

$$y = \sqrt{x^5 - 5x}.$$

3. Розв'язати графічно систему рівнянь:

$$\begin{cases} x^2 - 6x = y^2 \\ 5x + 6y = 4 \end{cases}.$$

4. Визначити кількість коренів рівняння $-3x^5 - 5x^2 + 9x = 0$.

ТЕМА 4. ADVANCED GRAPHER. ПОБУДОВА ТА ДОСЛІДЖЕННЯ ГРАФІКІВ ФУНКЦІЇ. ОБЧИСЛЕННЯ ПЛОЩ ПЛОСКИХ ФІГУР ЗА ДОПОМОГОЮ МАТЕМАТИЧНИХ ПАКЕТІВ ADVANCED GRAPHER ТА GEOGEBRA

Список рекомендованих джерел:

1. Інноваційні інформаційно-комунікаційні технології навчання математики : навч. посіб. / Т. Г. Крамаренко, В. В. Корольський, С. О. Семеріков, С. В. Шокалюк ; наук. ред. М. І. Жалдак. Кривий Ріг : Криворізький держ. пед. ун-т, 2019. 444 с. URL : <http://elibrary.kdpu.edu.ua/handle/123456789/3315>.
2. Уроки математики з комп'ютером: посібн. для вчителів і студентів / Крамаренко Т. Г. та ін; за ред. М. І. Жалдака. Кривий Ріг: Видавничий дім, 2008. 272 с. URL : http://elibrary.kdpu.edu.ua/jspui/bitstream/0564/570/1/tgkramarenko_urok_Kniga_2008.pdf
3. Сіденко Л.М., Сіденко О.М. Побудова графіків функцій за допомогою програми Advanced Grapher // *Математика в школах України*. 2007.№13-1 URL: <https://cutt.ly/7paly7E>.


4.1 Теоретичні відомості

Advanced Grapher – потужна і проста у використанні програма для побудови графіків і їх аналізу. Підтримує побудову графіків функцій вигляду $Y(x)$, $X(y)$, в полярних координатах, заданих параметричними рівняннями, графіків таблиць, неявних функцій (рівнянь) і нерівностей, до 30 графіків в одному вікні. Обчислювальні можливості: регресійний аналіз, знаходження нулів і екстремумів функцій, точок перетину графіків з координатними осями, відшукування похідних, рівнянь дотичних і нормалей, чисельне інтегрування. Велика кількість параметрів графіків і координатної площини. Має можливості друку, збереження і копіювання графіків у вигляді малюнків, багатодокументний інтерфейс, що набувається. Advanced Grapher може

використовуватися в некомерційних цілях безкоштовно. Для того, щоб скористатися цією можливістю, при інсталяції слід вибрати російську мову інтерфейсу. Advanced Grapher має потужні засоби для управління графіками. Ви можете легко створювати, видаляти, дублювати графіки, змінювати їх властивості і порядок в списку графіків, будувати графіки функцій, заданих кількома аналітичними виразами на різних проміжках.. Для керування графіками можна використовувати пункт *Графік* головного меню, а в ньому – вікно *Список графіків*. Графіки мають різноманітні властивості, деякі з яких є спільними для різних типів графіків (наприклад, опис та колір), а наявність інших залежить від типу. Кожний графік має основні та додаткові властивості. Найпростіший спосіб змінити параметри оформлення графіка – використати пункт меню. *Графік*. Деякі типи графіків ($Y(x)$, $X(y)$, *графіки таблиць* и т.д.) можуть бути побудовані лініями і/або точками, можна змінювати стиль штриховки для графіків нерівностей і т.п. Параметри оформлення також можна змінити з допомогою вікна *Властивості графіка*. Параметри документа визначають зображення координатної площини, інтервали побудови і параметри побудови графіків. Змінити параметри документу можна з допомогою вікна *Властивості документа*. Його можна викликати кнопкою або командою *Графіки*→*Властивості* документа в головному меню. Обчислювальні можливості програми здійснюються з допомогою пункту *Обчислення* головного меню. Вікно *Дослідження функції* призначене для того, щоб вказати параметри дослідження функції. Можна ввести формулу функції або вибрати її в комбінованому списку « $Y(x)$ ». Цей список містить формули функцій типу $Y(x)$, графіки яких вже існують в активному документі. Вибравши опцію *Нулі функції і Екстремуми*, отримаєте шукані значення нулів та екстремумів функції із заданою точністю. Можна вибрати інтервал, на якому слід аналізувати функцію, за допомогою налаштувань *Мінімум X* і *Максимум X*. Якщо Ви вибрали опцію *Використовувати похідну*, то при знаходженні екстремумів, проміжків монотонності буде використана

аналітично знайдена похідна. З цією ж метою зручно використати графік першої похідної.

Далі можна продовжити дослідження функції за допомогою другої похідної. Для цього зручно застосовувати графік другої похідної. Вікно *Перетин* призначене для того, щоб задати параметри відшукування координат точок перетину графіків функцій, його ж можна використати для знаходження точок перетину вибраного графіка з координатними осями. Вікно *Визначений інтеграл* призначене для того, щоб задати параметри відшукування абсолютного значення визначеного інтеграла як площі криволінійної трапеції та площі фігури, обмеженої двома кривими.

Після відкриття програми *AdvancedGrapherVersion 2.2*, натискаємо кнопку «Додати графік» (або ).

У вікні, що відкрилось, записуємо функцію, яку хочемо побудувати, для цього вибираємо загальний вигляд функції зі списку (в нашому прикладі необхідні функції вигляду $Y(x)$ та $X(y)$) і вносимо рівняння функцій в рядок «Формула» далі вибираємо параметри графіка: товщина, стиль лінії та колір.

Властивості графіка за замовчуванням

При додаванні нового графіка його властивості встановлюються в значення за замовчуванням. При зміні типу графіка (у вікні «Властивості графіка») його додаткові властивості також встановлюються в значення за замовчуванням. Ви можете змінити властивості графіка за замовчуванням за допомогою вікна «Властивості графіка за замовчуванням». Це вікно може бути викликано за допомогою команди «Графіки | Властивості графіка за замовчуванням» з головного меню.

Також можна автоматично знаходити значення функції в будь-якій точці, мінімальне та максимальне значення функції, нулі функції.

Програма *AdvancedGrapher* дозволяє будувати різноманітні графіки на площині, здійснювати дослідження функцій, наближено і точно знаходити корені алгебраїчних рівнянь тощо. Продемонструємо, як виконується

побудова криволінійних трапецій та обчислення їх площ у програмі AdvancedGrapher на прикладах.

4.2 Приклади виконання завдань

Приклад 1. Знайдіть площу криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції

$$y = \frac{1}{(x-1)^2}, y = 0, x = 0, x = -1.$$

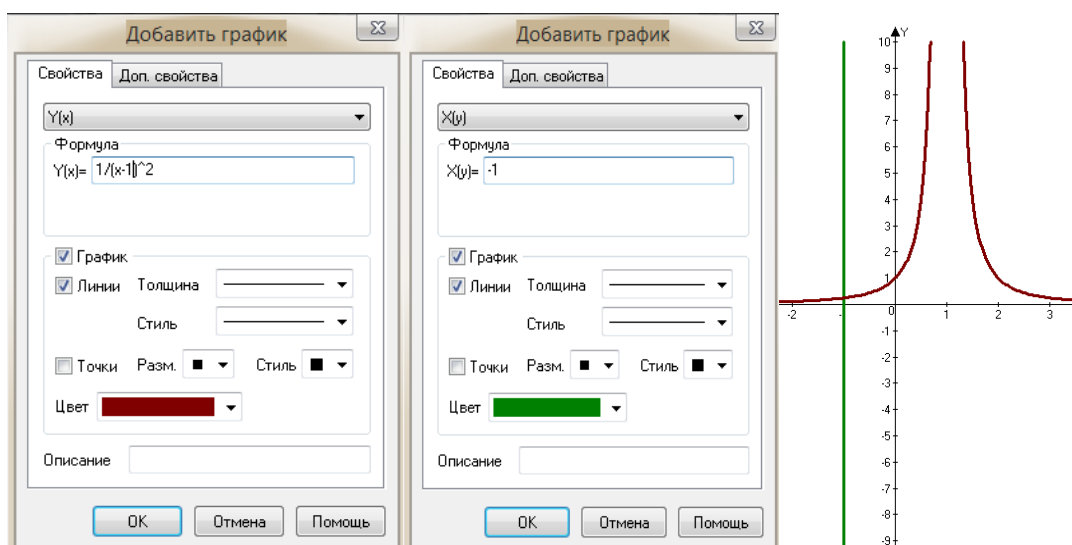


Рис. 4.1

Вводимо функції, обираємо товщину лінії та колір (див. рис. 4.1). Для того щоб візуально побачити цю трапецію, потрібно натиснути кнопку $\int y dx$. Після чого внесемо у вікно, що відкрилось, дані натиснемо кнопку «Обчислити». У рядку «Висновок» побачимо чисельний результат для площі заданої трапеції. Натиснувши кнопку «Додати графік», виберемо варіант штриховки трапеції (див. рис. 4.2) і на екрані побачимо саму трапецію. Щоб збільшити або зменшити масштаб графіків по осях, є кнопки на панелі інструментів.

Після побудови криволінійної трапеції, переходимо до знаходження її площі.

$$S = \int_{-1}^0 \frac{1}{(x-1)^2} dx = \int_{-1}^0 (x-1)^{-2} dx = -\frac{1}{x-1} \Big|_{-1}^0 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ (кв. од)}$$

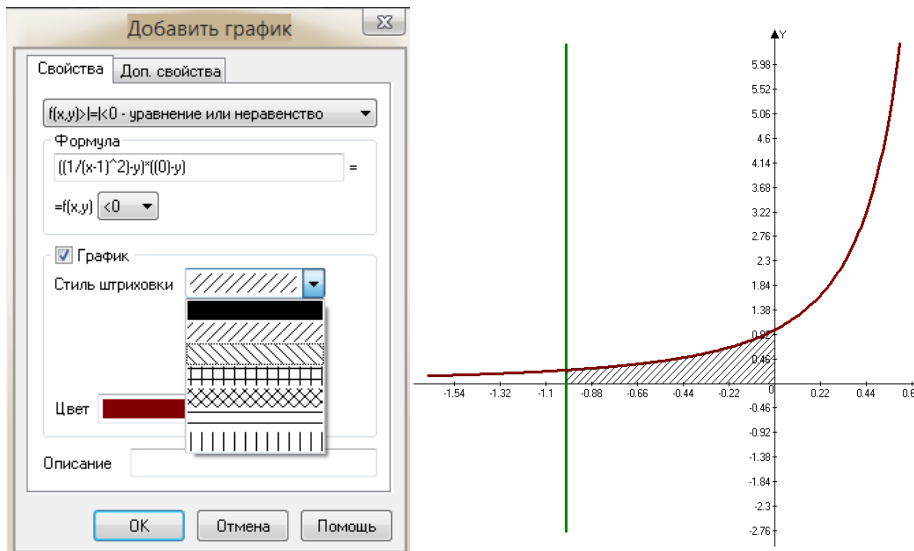


Рис. 4.2

Приклад 2. Знайдіть площу фігури обмеженої лініями $y = 4 - x^2$, $y = x^2 - 2x$.

Виконаємо ті самі дії, що і в попередньому прикладі – будуємо графіки заданих функцій: це дві параболі, вітки однієї з них опущені вниз, а другої – підняті вгору (див. рис. 4.3). Щоб вказати межі інтегрування, треба знайти точки перетину цих двох парабол. Скористаємось кнопкою «Перетин» на панелі інструментів.

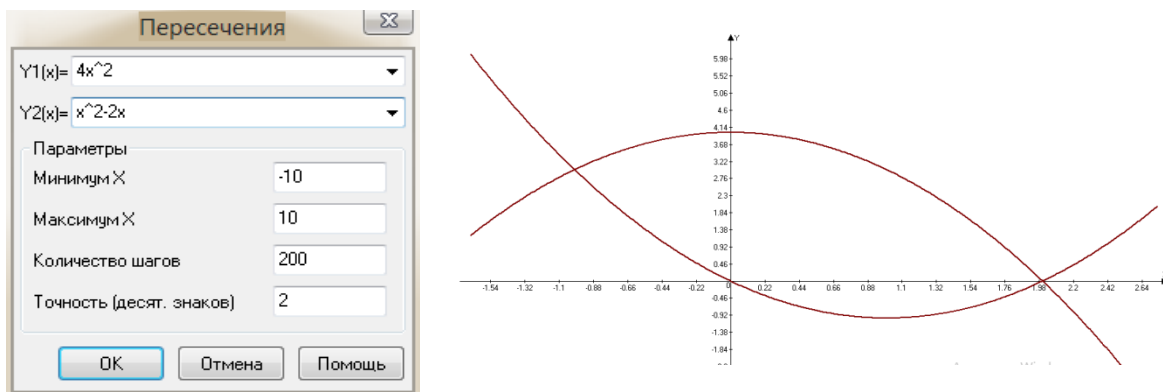


Рис. 4.3

Як бачимо з рис. 4.3, графіки перетинаються в двох точках, координати яких $(-1; 3)$ та $(2; 0)$. Отже, межі інтегрування від -1 до 2 . Тепер можемо скористатись функцією $\int y dx$ програми і побудувати та обчислити площу заданої фігури (див. рис. 4.4).

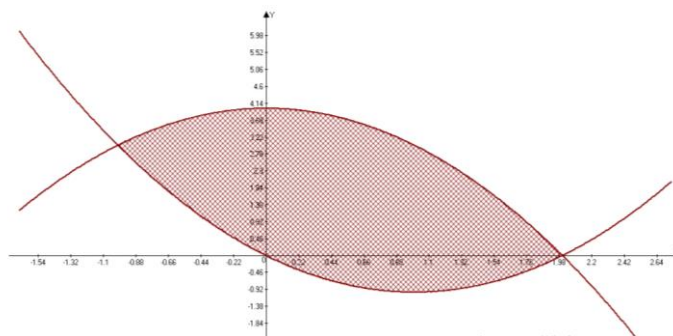
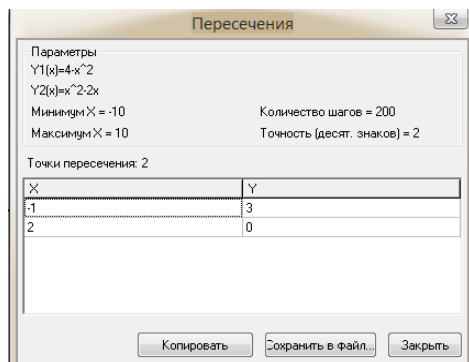


Рис. 4.4

$$S = \int_{-1}^2 (4 - x^2 - x^2 + 2x) dx = \int_{-1}^2 (4 - 2x^2 + 2x) dx = \left(4x - \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} \right) \Big|_{-1}^2$$

$$S = 8 - \frac{16}{3} + 4 + 4 - \frac{2}{3} - 1 = 9 \text{ (кв. од).}$$

Як бачимо, працювати з даним програмним засобом не складно та за допомогою нього можна не тільки будувати фігури, а й перевіряти правильність обчислення площі.

Наведемо приклад використання інтерактивного середовища GeoGebra для знаходження площі криволінійної трапеції.

Приклад 3. Знайти площу фігури обмеженої графіками функцій: $y = 0$, $y = x^2$, $y = 2x - x^2$.

Першим і найважливішим етапом розв'язання є побудова графіків функцій, оскільки потрібно безпомилково визначити межі інтегрування. Для цього в полі введення набираємо: $x^2 - y \geq 0 \wedge 2x - x^2 - y \geq 0 \wedge y \geq 0$, отримуємо область в якій всі задані графіки перетинаються (рис. 4.5).

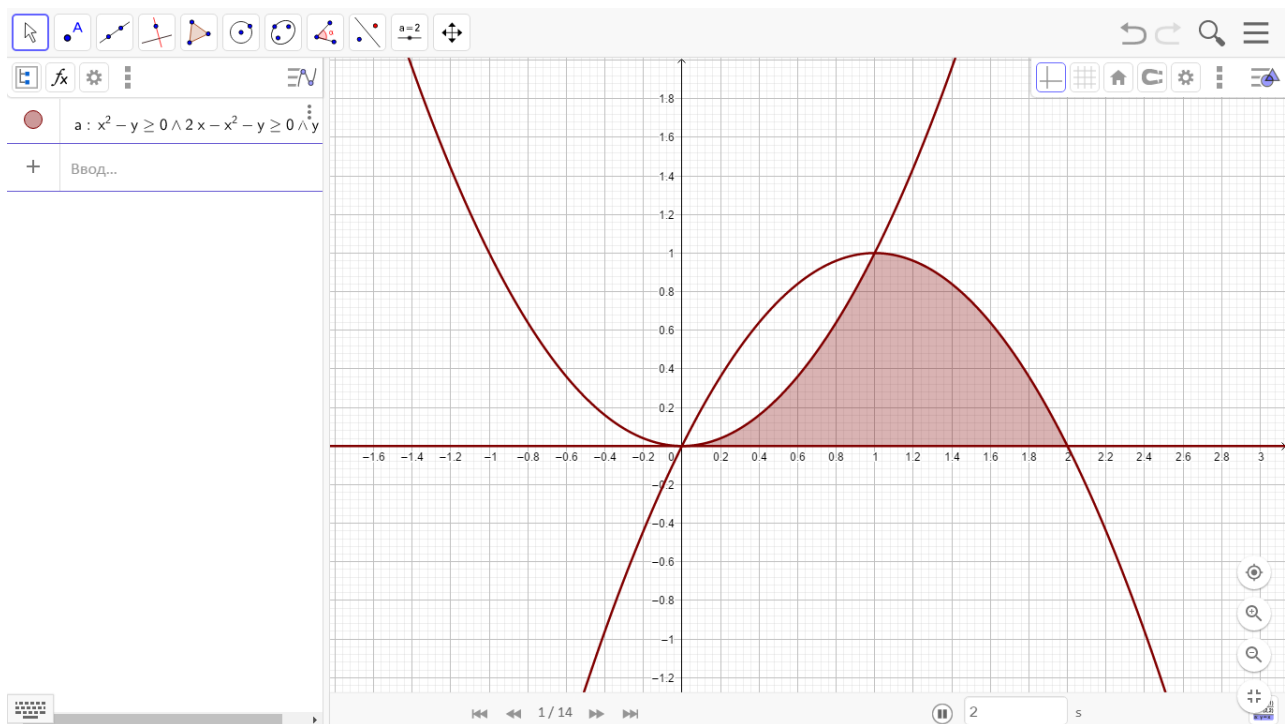


Рис. 4.5

З рисунка видно, що в даній області на відрізку $[0; 1]$ над віссю Ox розташований графік функції $y = x^2$, а на відрізку $[1; 2]$ над віссю Ox розташований графік функції $y = 2x - x^2$. Отже, щоб знайти площу зафарбованої фігури, потрібно знайти суму площ. Для наочності виділимо ці площі на рисунку. На панелі інструментів обираємо «Точка» і ставимо точки з координатами $(1; 1)$ та $(1; 0)$, далі з'єднуємо їх за допомогою інструмента «Відрізок», щоб зробити відрізок пунктирним, на панелі об'єктів натискаємо правою клавішею миші на три крапки і обираємо «Налаштування» (Налаштування \rightarrow Стиль \rightarrow Стиль лінії). Таким чином, поділили криволінійну трапецію на дві частини. Для того, щоб підписати графіки і замальовану область, потрібно на панелі інструментів натиснути «ABC текст» і поставити курсор на область, яку потрібно підписати, також в налаштуваннях можна обрати стиль підпису, розмір та колір (рис. 4.6.).

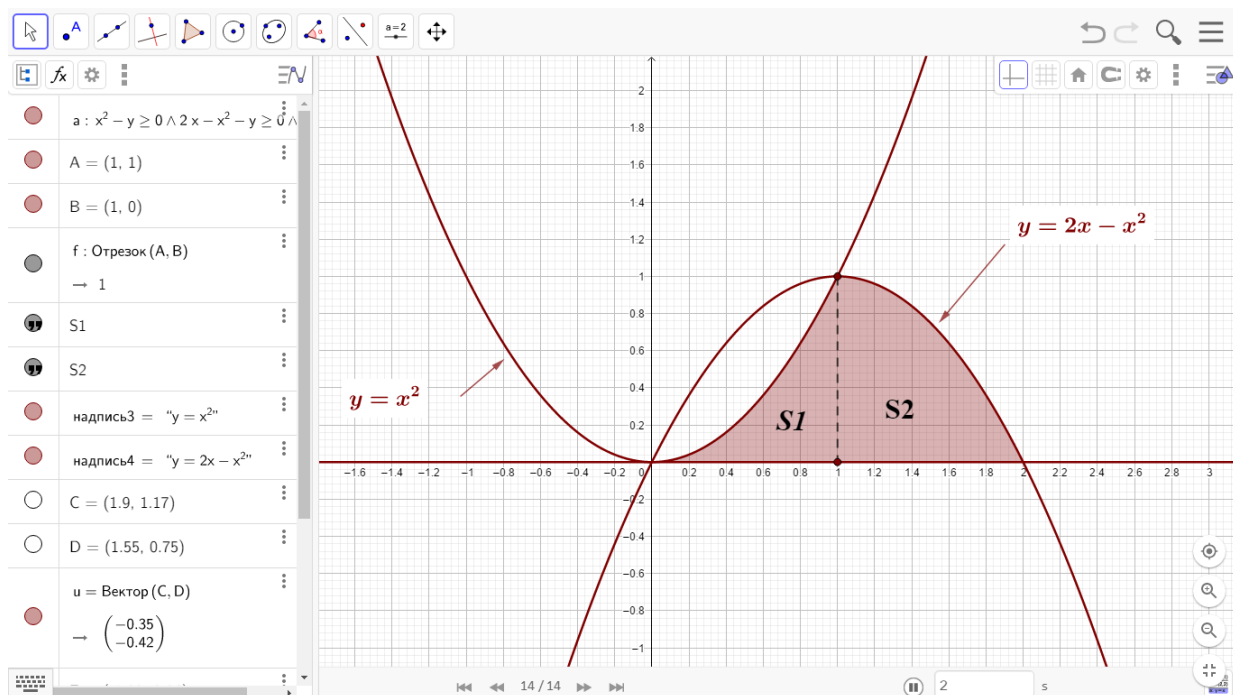


Рис. 4.6

Після побудови за відомою формулою знаходимо площу:

$$S = S_1 + S_2 = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 (2x - x^2) dx = \frac{1}{3} x^3 \Big|_0^1 + \left(x^2 - \frac{1}{3} x^3 \right) \Big|_1^2.$$

$$S = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1.$$

Приклад 4. Знайти значення функції $y = x^2 - 4$ в точці $x_0 = 3$.

Натискаємо на інструмент «Обчислення функцій», вводимо функцію та точку, натискаємо «обчислити».

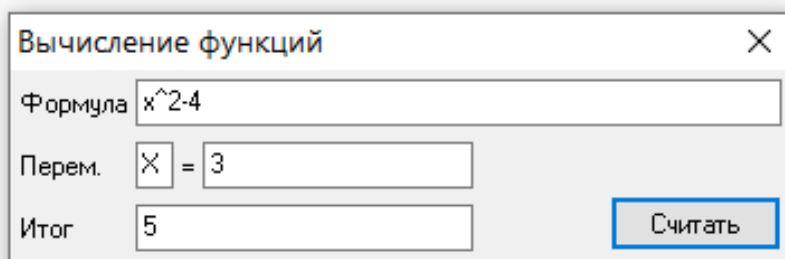
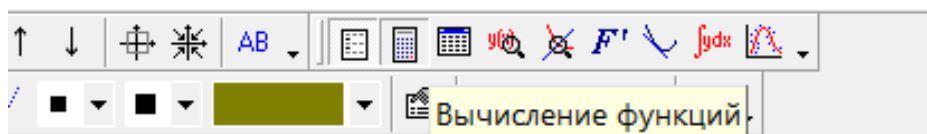


Рис. 4.7

Приклад 5. Знайти нулі функції $y = x^2 - 4$.

Натискаємо інструмент «дослідити функцію», обираємо «нулі функції».

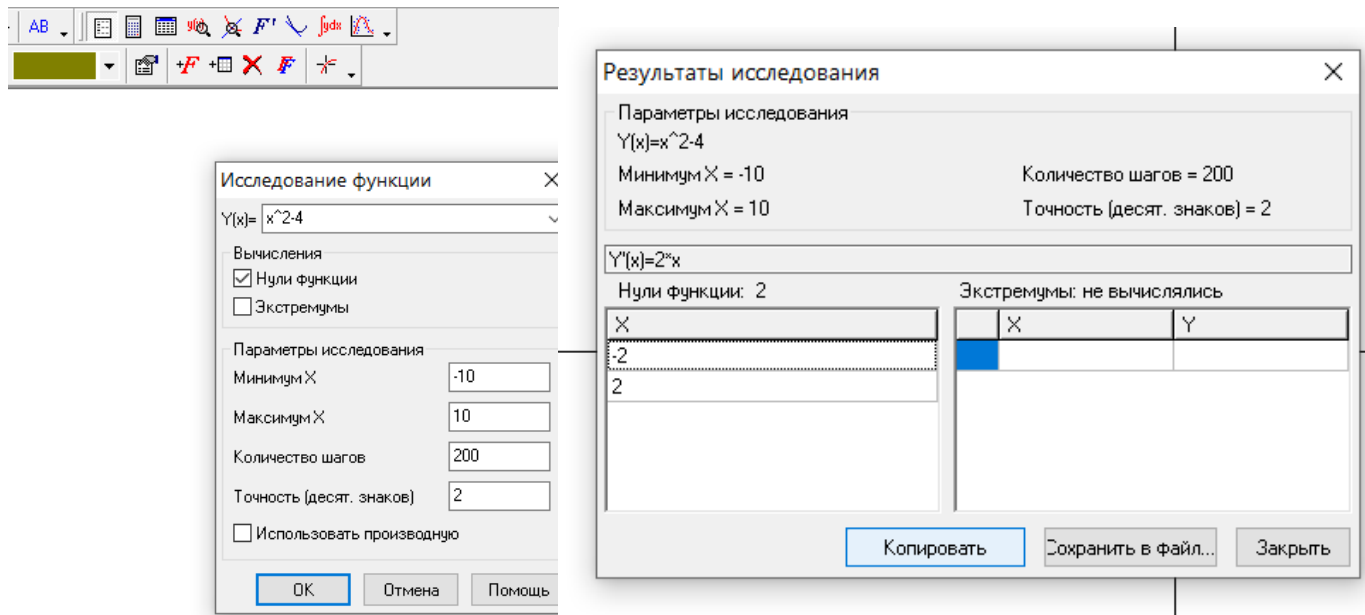


Рис. 4.8

Відповідь: -2; 2.

Приклад 6. Знайти найбільше та найменше значення функції (екстремуми) функції $y = x^2 - 4$ на проміжку $[-5; 5]$

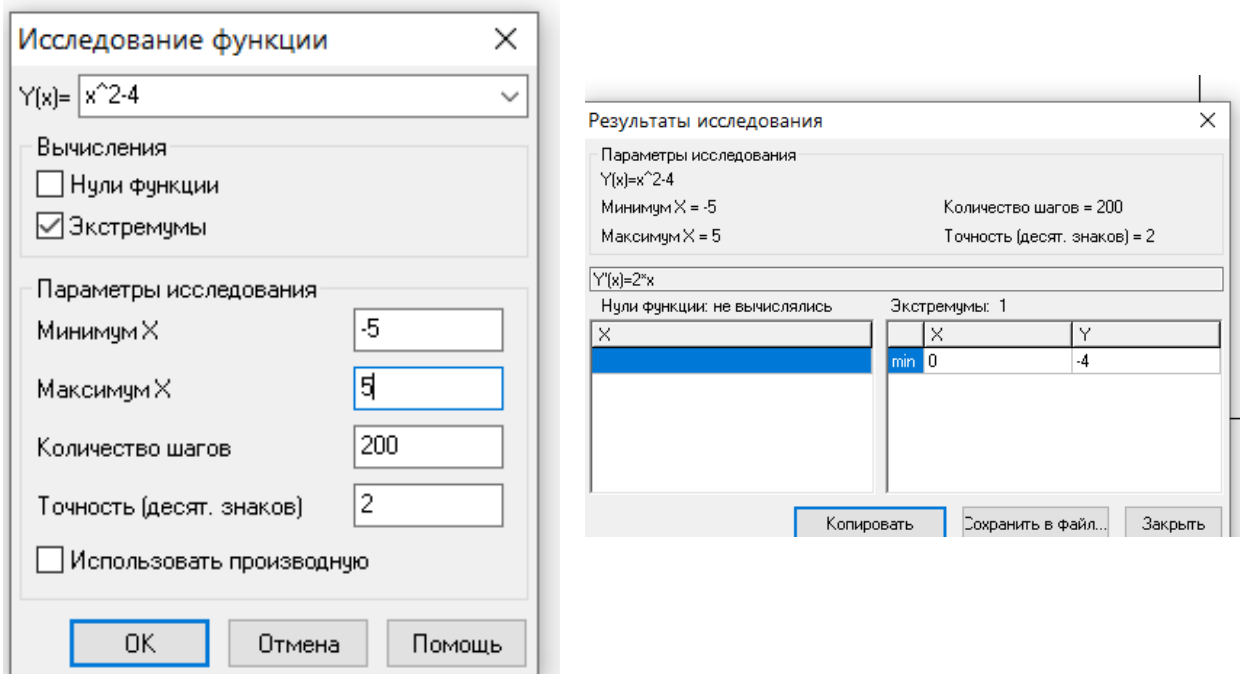


Рис. 4.9

Відповідь: мінімум функції $y(0) = -4$.

4.3 Індивідуальні завдання

Варіант 1.

1. Знайти нулі функції, обчислити значення функції в точці $x_0 = 1,5$, якщо

$$y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}.$$

2. Знайти точки екстремума функції на проміжку $[-20; 20]$, якщо

$$y = \frac{2x^2}{1 + x^2}.$$

3. Побудувати функцію та вказати її властивості:

$$y = \frac{|x + 1| - x}{|x - 2| + 3}.$$

4. Обчислити площу фігури (за допомогою Advanced Grapher), обмеженої лініями $y = 4x - x^2$ та $y = 4 - x$.

5. Обчислити площу фігури (за допомогою GeoGebra), обмеженої лініями:

$$y = \ln x, \quad y = 1 - x, \quad y = 1.$$

6. Обчислити без застосування програм, відповідь перевірити за допомогою Advanced Grapher або GeoGebra.

Обчислити площу фігури, обмеженої лініями:

$$y = 2x^2, \quad y = -1 + 3x.$$

Варіант 2.

1. Знайти нулі функції, обчислити значення функції в точці $x_0 = -0,3$, якщо

$$y = \frac{e^x}{x}.$$

2. Знайти точки екстремума функції на проміжку $[-20; 20]$, якщо

$$y = \frac{(x + 1)^2}{x - 2}.$$

3. Побудувати функцію та вказати її властивості:

$$y = \frac{1}{||x| - 2|}.$$

4. Обчислити площу фігури (за допомогою Advanced Grapher) обмеженої лініями $y = 6 + x - x^2$ та $y = 6 - 2x$.

5. Обчислити площу фігури (за допомогою GeoGebra), обмеженої лініями:

$$y = \ln x, \quad y = \ln^2 x.$$

6. Обчислити без застосування програм, відповідь перевірити за допомогою Advanced Grapher або GeoGebra.

Обчислити площу фігури, обмеженої лініями:

$$y = x^2 - 1, \quad y = 1 - x^2.$$

Варіант 3.

1. Знайти нулі функції, обчислити значення функції в точці $x_0 = 3,5$, якщо

$$y = \frac{e^{x-1}}{x}.$$

2. Знайти точки екстремума функції на проміжку $[-20; 20]$, якщо

$$y = \frac{x - 1}{x^2 - 2x}.$$

3. Побудувати функцію та вказати її властивості:

$$y = \cos \frac{|x| + x}{2}.$$

4. Обчислити площу фігури (за допомогою Advanced Grapher) обмеженої лініями:

$$y = x^2 \text{ та } y = -x^2 + 2x.$$

5. Обчислити площу фігури (за допомогою GeoGebra), обмеженої лініями:

$$y = e^x, \quad y = 2, \quad y = \frac{1}{x+1}.$$

6. Обчислити без застосування програм, відповідь перевірити за допомогою Advanced Grapher або GeoGebra.

Обчислити площу фігури, обмеженої лініями:

$$y = x - x^2, \quad y = 0.$$

Варіант 4.

1. Знайти нулі функції, обчислити значення функції в точці $x_0 = 1,5$, якщо

$$y = 2^{2x-x^2}.$$

2. Знайти точки екстремума функції на проміжку $[-20; 20]$, якщо

$$y = \frac{2x}{4 + x^2}.$$

3. Побудувати функцію та вказати її властивості:

$$y = \frac{1}{x^3 - 4x}.$$

4. Обчислити площу фігури (за допомогою Advanced Grapher) обмеженої лініями:

$$y = 4x - x^2 \text{ та } y = |3|.$$

5. Обчислити площу фігури (за допомогою GeoGebra), обмеженої лініями:

$$y = \frac{x-1}{e-1}, y = \ln x.$$

6. Обчислити без застосування програм, відповідь перевірити за допомогою Advanced Grapher або GeoGebra.

Обчислити площу фігури, обмеженої лініями:

$$y = \sqrt{x}, \quad y = 6 - x, \quad y = 0.$$

Варіант 5.

1. Знайти нулі функції, обчислити значення функції в точці $x_0 = 0,5$, якщо

$$y = x \cdot \ln x.$$

2. Знайти точки екстремума функції на проміжку $[-20; 20]$, якщо

$$y = \frac{x}{-1 + x^2}.$$

3. Побудувати функцію та вказати її властивості:

$$y = 0,5\sqrt{x-3}.$$

4. Обчислити площу фігури (за допомогою Advanced Grapher) обмеженої лініями:

$$y = |x - 1| \text{ та } y = 3 - |x|.$$

5. Обчислити площу фігури (за допомогою GeoGebra), обмеженої лініями:

$$y = \sqrt{9 - 4x}, \quad y = \sqrt{9 + x}, \quad y = 0.$$

6. Обчислити без застосування програм, відповідь перевірити за допомогою Advanced Grapher або GeoGebra.

Обчислити площу фігури, обмеженої лініями:

$$y = 2 - x^2, \quad y = 0, \quad y = \sqrt{x}.$$

ТЕМА 5. МАТЕМАТИЧНА СИМВОЛІКА ТА КУЛЬТУРА МАТЕМАТИЧНИХ ЗАПИСІВ. НАБІР ТА РЕДАГУВАННЯ МАТЕМАТИЧНИХ ФОРМУЛ. РЕДАКТОР ФОРМУЛ У WORD. LATEX

Список рекомендованих джерел:

1. Крєневич А. П. Видавнича система LaTeX : метод. вказівки до лабораторних занять з дисципліни «Практикум на ЕОМ» / Київ : ВПЦ «Київський університет», 2007. 49 с.
2. Махней О. В. Лабораторний практикум у Maple : метод. реком. до проведення лабораторних занять. Івано-Франківськ : Видавничо-дизайнерський відділ Центру інформаційних технологій Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника, 2010. 32 с

5.1 Теоретичні відомості

Математичні позначення — символи, які використовують для компактного запису математичних рівнянь і формул. Крім цифр та літер різних алфавітів (латинського, у тому числі в готичному накресленні, грецького та єврейського), математичний мова використовує безліч спеціальних символів, винайдених за останні кілька століть.

Математична культура (індивідуальна) - це інтегральна характеристика особистості, яка у всій повноті на даний момент часу фіксує здатність цієї особистості адекватно сприймати доступну її розумінню математичну складову наукової картини світу і вибудувати у відповідності з цим сприйняттям свою освітню, професійну, суспільну діяльність, творити свої морально-етичний та естетичний ідеали.

До поняття математичної культури відносять математичну грамотність (термінологічна грамотність, обчислювальна культура, графічна культура) та навички математичного моделювання.

Редактор формул Microsoft Equation використовувався для

створення формул у текстових документах у Word 2007 та 2010 років.

За допомогою редактора формул Microsoft Equation можна було створювати складні формули, вибираючи потрібні символи з панелі інструментів і вводячи змінні та цифри з клавіатури. При створенні формул розмір шрифтів, інтервали і формати автоматично регулювалися відповідно до правил запису математичних виразів. Змінювати і форматування можна в процесі роботи.

У ряду панелі інструментів редактора формул були розташовані кнопки для вставки у формулу більше 150 математичних символів, велика частина яких недоступна в стандартному шрифті Symbol. Для вставки символу у формулу необхідно було натиснути кнопку у верхньому ряду панелі інструментів, а потім вибрати певний символ з палітри під кнопкою.

Панель інструментів дозволяла використовувати :

- Символи відносин.
- Пропуски і багато крапки.
- Символи надрядкових знаків.
- Оператори.
- Стрілки.
- Логічні символи.
- Символи теорії множин.
- Різні символи.
- Грецькі букви (рядкові).
- Грецькі букви (прописні).

У нижньому ряду панелі інструментів редактора формул були розташовані кнопки, призначені для вставки шаблонів або структур, які включають символи типу дробі, радикалів, сум, інтегралів, множення, матриць або різних дужок або відповідні пари символів типу круглих і квадратних дужок.

У Word 2007 та 2010 вставити формуло допомагає функція “Формула”,

а у Word 2013, 2020 – «Рівняння».

Текстовий редактор Word підтримує вставку різних готових формул з вбудованою бібліотеки. Щоб відкрити редактор зробіть наступне:

- У стрічці інструментів перейдіть на вкладку «вставка» і виберіть розділ «символи».
- Натисніть кнопку «рівняння» (В word 2010 кнопка називається «Формула»).
- У випадяючому списку виберіть дію «Вставити нове рівняння».

У текстовому документі з'явиться область вставки формули і в стрічці відобразиться панель редактора формул:

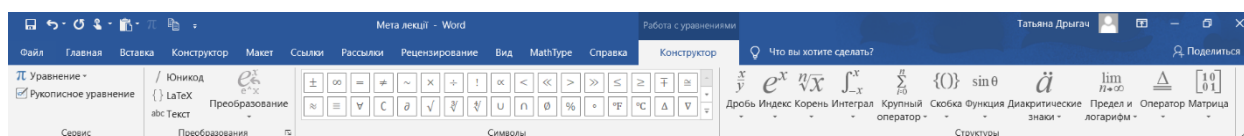


Рис. 5.1

Вибирайте потрібні шаблони елементів формули і вписуйте в рамки необхідні дані. При введенні нових шаблонів для елементів формули звертайте увагу на положення курсору і його розмір. Від цього залежить правильність розташування елементів формули. Щоб змінити формулу, зробіть подвійний клік на ній. Відобразитися область розташування поточної формули, а в стрічці інструментів стане доступний Конструктор, що містить інструменти редагування формул. Клік за межами області редагування відключає режим редагування і видимість поля формули.

Якщо в документі використовуються однотипні формули, незначно відрізняються один від одного, то можна зберегти формулу. А потім її використовувати як шаблон, змінюючи частина вмісту. виконайте команду «Зберегти як нове рівняння». Відкриється вікно налаштувань. Тут можна вказати нове ім'я формули, визначити її категорію, зробити опис. Але можна

залишити все як є. Після збереження ваша формула стане доступна для швидкої вставки.

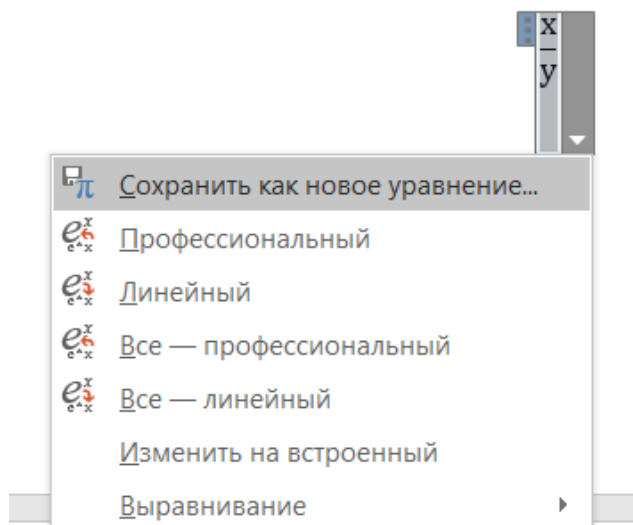


Рис. 5.2

Існують два види представлення **формул** у word: професійний та лінійний.

Професійний: $x^2 - y^2$.

Лінійний: $x^2 - y^2$.

Це дозволяє робити перехід між стандартним, зрозумілим виглядом формули та формулою, яка записана у LATEX/ Юнікод. За замовчуванням використовується професійний вид, але якщо вам знадобиться лінійний, просто виберіть формулу в ворді, яку ви хочете змінити, і клацніть відповідний інструмент на вкладці «Конструктор» в режимі «Роботи з рівняннями» в групі «Сервіс».

Математичні формули у *Latex* можуть бути внутрішньотекстовими або виключними. На відміну від внутрішньотекстових формул виключні формули розміщуються в окремих рядках. Внутрішньотекстова формула має починатись з символу \$ і завершуватись цим символом. Замість символу \$ для початку формули можна використовувати команду \(. а для її завершення — \). Виключна формула має починатись з двох символів \$\$ і завершуватись символами \$\$\$. Альтернативне оформлення виключної формули передбачає використання команди \[на початку формули і команди \] в її кінці.

Всі латинські букви відображаються математичним курсивом, тобто курсивом зі збільшеними інтервалами між буквами. Символи арифметичних операцій і логічних відношень (+, -, /, =,), цифри, знаки пунктуації, круглі і квадратні дужки, а також деякі інші символи набираються безпосередньо. Всередині формули можна робити текстові вставки командою `\mbox{текст}`. Ці вставки можуть містити українські букви. Для створення нижнього індексу ставлять знак `_`, після якого у фігурних дужках записують сам індекс. Для верхнього індексу (показника степеня) використовують знак `^`, після якого у фігурних дужках вказують сам індекс (показник степеня). Якщо верхній чи нижній індекс складається лише з одного символу, то фігурні дужки можна пропускати. Для створення штриха після довільного символу використовують прямий апостроф `'`. Для створення кількох штрихів цей апостроф наводять потрібну кількість разів. Робота з індексами і штрихами ілюструється наступним прикладом, в якому також показано, як зміщувати індекси.

$$\$f_{ij}=a''_{ij}+b_i^2+c^j-c_{i+1}\}^{\{i+j}}$ \quad \left| \quad f_{ij} = a''_{ij} + b_i^2 + c_i^j - c_{i+1}^{i+j} \right.$$

Рис. 5.3

Дроби, які мають бути записані через косу риску, набираються безпосередньо. Однак частіше використовуються дроби, в яких чисельник розташований над знаменником. Для їх створення використовують команду `\frac{чисельник}{знаменник}`. Для створення радикалів використовують команду `\sqrt[показник]{вираз}`.

$$\$\frac{x^2+y^2}{x^3+y^3}+\frac{13\sqrt{2+\sqrt{4}3}}{3}$ \quad \left| \quad \frac{x^2+y^2}{x^3+y^3} + \frac{1}{3}\sqrt{2+\sqrt{4}3} \right.$$

Рис. 5.4

Існує велика кількість різних математичних символів, які можна використовувати у формулах. Всі ці символи створюють з допомогою

спеціальних команд. Наприклад, команда `\alpha` дозволяє отримати грецьку букву α , команда `\Rightarrow` — стрілку \Rightarrow , команда `\forall` — символ \forall , команда `\sin` — \sin . Ці символи також є на панелях інструментів у програмах WinEdt і TeXnicCenter. При виборі такого символу в позицію курсора вставляється відповідна команда. Деякі символи можуть мати нижні і верхні межі, наприклад,

$$\backslash[\backslash\sum_{k=1}^{\infty} a_k\backslash] \quad \Bigg| \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

Рис. 5.5

У внутрішньотекстових формулах та для знаків інтегралів межі відображаються збоку, а не знизу і зверху. Для відображення меж знизу і зверху перед ними потрібно вказати команду `\limits`. Круглі, квадратні дужки та знак модуля набираються безпосередньо з клавіатури. Для фігурних дужок передбачені 12 команди `\{` і `\}`. Подвійні вертикальні лінії (знак норми чи матриці) створюються командою `\|`. Є також команди для створення всіляких нестандартних типів дужок. Якщо дужки чи команди для їхнього створення використовувати у формулі безпосередньо, то такі дужки матимуть розмір звичайних символів. Для збільшення розміру дужок відповідно до розміру фрагмента формули в дужках перед дужкою, що відкривається, використовують команду `\left`, а перед дужкою, яка закривається, — команду `\right`, наприклад, `\left(... \right)`. Кожній команді `\left` має відповідати своя команда `\right` і навпаки. Якщо однієї з дужок не потрібно, то замість цієї дужки після команди `\left` або `\right` потрібно поставити крапку.

Для самостійного вибору розміру дужок замість команд `\left` і `\right` використовують команди `\big`, `\Big`, `\bigg` і `\Bigg`, кожна наступна з яких створює дужку більшого розміру, ніж попередня.

$$\begin{array}{l} \int_a^b x \, dx = \\ \left. \frac{x^2}{2} \right|_a^b \end{array} \quad \left| \quad \int_a^b x \, dx = \frac{x^2}{2} \Big|_a^b \right.$$

$$\big| |x-2| - |x+1| \big| \quad \left| \quad ||x - 2| - |x + 1|| \right.$$

Рис. 5.6

Є кілька команд, які працюють з цілими фрагментами формул. Зокрема, команда `\overline{фрагмент}` утворює горизонтальну лінію над фрагментом формули. Команди `\overbrace{фрагмент}^{напис}`, `\underbrace{фрагмент}_{напис}` над (під) фрагментом формули друкують горизонтальну фігурну дужку, а над (під) нею додають напис. Команда `\stackrel{up}{line}` друкує вираз `line` в рядку, а вираз `up` — над ним.

$$A \stackrel{f}{\rightarrow} B$$

Рис. 5.7

Для створення матриць використовують оточення `array`, яке має обов'язковий аргумент — преамбулу матриці, яка складається з послідовності букв, що описують стовпці матриці. Кожна буква відповідає одному стовпцю. У преамбулі матриці буква `c` означає центрування відповідного стовпця, буква `l` — вирівнювання стовпця по лівому краю, а буква `r` — по правому краю. Елементи в рядку матриці відокремлюються символами `&`, а рядки — командами `\\`.

$$\begin{array}{l} \left(\begin{array}{ccc} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{array} \right) \end{array}$$

Рис. 5.8

5.2 Приклади виконання завдань

1. Записати формулу за допомогою редактору LATEX:

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Оскільки степінь числа записується за допомогою «^», то формула матиме вигляд :

$$c^2=a^2+b^2.$$

2. Перетворити формулу записану у LATEX у професійний вигляд.

`\sqrt[n]{x}`

Символ \$ означає вбудованість у текст, тому для аналізу його не беремо.

Відповідь : $\sqrt[n]{x}$. Також перевірити свою відповідь можна використовуючи створення онлайн тестів у програмі Classtime» (див. рис. 5.9).

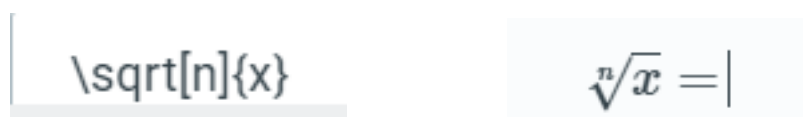


Рис. 5.9

3. Заповнити порожні місця у таблиці:

Звичайний вигляд формули (професійний)	LATEX	UnicodeMath
$\sqrt[n]{x}$	<code>\sqrt[n]{x}</code>	<code>\sqrt{(n&x)}</code>
$\left(a + \frac{b}{c}\right)$	<code>a+\frac{b}{c}</code>	<code>(a+b/c)</code>

5.3 Індивідуальні завдання

Варіант 1

Заповнити порожні місця у таблиці.

Звичайний вигляд формули (професійний)	LATEX	UnicodeMath
	$\sqrt[5]{x}$	
$\left(7 + \frac{5}{8}\right)$		
		$_a^b x$
		$(5a-b/c)$
$\sqrt[8]{x^{11}}$		
	$x^5 + \frac{3}{z^2}$	
		$\sqrt{(n\&8)}$
$\lim_{n \rightarrow \infty} n$		
		$a/(b + c)$
		\overline{ABC}

Варіант 2

Заповнити порожні місця у таблиці.

Звичайний вигляд формули (професійний)	LATEX	UnicodeMath
	$\sqrt[3]{x^4}$	
$\left(\frac{8}{5} - \frac{5}{8}\right)$		
		$_2^5 x$
		$(5a+6c)/(b-c)$
$\sqrt[7]{x^{17} - 5}$		
	$6x^4 + \frac{3+x}{z^2}$	
		$\sqrt{(4\&8)}$
$\left\{a + \frac{b}{c}\right\}$		
		$a/(8b)$
	$k_{\{n+1\}} = n^2 + k_{n^2} - k_{\{n-1\}}$	

Варіант 3

Заповнити порожні місця у таблиці.

Звичайний вигляд формули (професійний)	LATEX	UnicodeMath
	$\sqrt[5]{x}$	
$\left(7 + \frac{5}{8}\right)$		
		$_7^8 x$
		$(5a-b/c)$
$\sqrt[6]{x^{13}}$		
	$x^3 + \frac{3-x}{y^2}$	
		$\sqrt{(5\&8)}$
	$a \notin A$	
		$7a/(b + c)$
	\hat{abc}	
$\bar{a} - 3\bar{b}$		

Варіант 4

Заповнити порожні місця у таблиці.

Звичайний вигляд формули (професійний)	LATEX	UnicodeMath
	$\sqrt[4]{32}$	
$\left(67 + \frac{15 - x}{8}\right)$		
		$_a^b x$
		$(5a-b)/c$
$\sqrt[8]{x^{15}}$		
	$2^5 + \frac{3}{5^2}$	
	$\{n \text{ choose } k\}$	
	$\begin{bmatrix} \\ \begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{matrix} \\ \end{bmatrix}$	
$y = e^{x^2}$		

Варіант 5

Заповнити порожні місця у таблиці.

Звичайний вигляд формули (професійний)	LATEX	UnicodeMath
	$\sqrt{x}{c}$	
$\left(56^2 + \frac{5}{8}\right)$		
		$_1^0 x$
		$6c/(5a-(b/c))$
$\sqrt[5]{x^{19}}$		
	$7(x^5)+\frac{3}{6^2}$	
		$\{a + b/c\}$
	$\cos (2\theta) = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$	
$\lim_{x \rightarrow 8} \frac{x^2 - 64}{x - 8}$		
	$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x} \mathrm{d}x$	

ПІСЛЯМОВА

Методичні настанови до виконання індивідуальних завдань освітнього компоненту «Програмні засоби для розв'язування математичних задач» рекомендований для здобувачів вищої освіти ОПП «Середня освіта (Інформатика)».

Методичні настанови дозволяють здобувачу освіти виконувати індивідуальні завдання: перший етап – ознайомлення із необхідним теоретичним матеріалом, другий – ознайомлення з прикладами виконання завдань, третій – самостійне виконання практичних завдань.

Перша частина методичних настанов дозволяє виконувати індивідуальні завдання алгебраїчного змісту, використовуючи такі математичні пакети як GeoGebra, SMath Studio, Advanced Grapher.

Крім отримання навичок роботи з цими математичними пакетами, здобувачі вищої освіти поглиблюють знання з математики, здобувають навички розв'язання задач з використанням прикладних програм, роботою з математичними формулами, а також набувають навичок роботи з LATEX.

Особлива увага приділена алгебраїчним обчисленням, динамічним моделям функції та дослідженню їх властивостей, рівнянням та їх системам, обчисленням похідних та інтегралів, обчисленням площ плоских фігур.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Інноваційні інформаційно-комунікаційні технології навчання математики : навч. посіб. / Т. Г. Крамаренко, В. В. Корольський, С. О. Семеріков та ін. Кривий Ріг : Криворізький держ. пед. ун-т, 2019. 444 с. URL : <http://elibrary.kdpu.edu.ua/handle/123456789/3315>. (дата звернення : 3.09.2020).
2. І. В. Кравченко, В. І. Микитенко. Інформаційні технології: Системи комп'ютерної математики : навч. посіб. для студ. спеціальності «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології» . Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018. 243с.
3. Уроки математики з комп'ютером: посібн. для вчителів і студентів / Крамаренко Т. Г. та ін; за ред. М. І. Жалдака. Кривий Ріг: Видавничий дім, 2008. 272 с.
4. Крєневич А. П. Видавнича система LaTeX: метод. вказівки до лабораторних занять з дисципліни «Практикум на ЕОМ» / Київ : ВПЦ «Київський університет», 2007. 49 с.
5. Лабораторний практикум з дисципліни «Інформаційні технології аналізу систем»: для здобувачів освітнього ступеня бакалавр зі спеціальності 122 «Комп'ютерні науки» та 124 «Системний аналіз» / упоряд. Ю. В. Триус, І. В. Герасименко / М-во освіти і науки України, Черкас. держ. технол. ун-т. Черкаси: ЧДТУ, 2018. 191 с. URL: <https://goo.su/1NmK>. (дата звернення : 3.09.2020).
6. М. І. Жалдак, Ю. В. Горошко, Є. Ф. Вінниченко. Математика з комп'ютером : посіб. для вчителів. К.: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 2015. 315 с. URL: <https://goo.su/1NLY>. (дата звернення : 12.09.2020).
7. Махней О. В. Практикум з LaTeX : метод. реком. Івано-Франківськ : Голіней, 2018. 36 с. URL : <https://kdrpm.pnu.edu.ua/wp->

content/uploads/sites/55/2018/03/LaTeX_mv_el.pdf. (дата звернення : 10.09.2020).

8. Практикум з опанування пакету динамічної математики GeoGebra як інструменту реалізації STEAM-освіти : навч. посібник / Л. Е. Гризун та ін. ; дар. В. В. Пікалова. 2018. 80 с. URL : <https://cutt.ly/fgCtD9L>. (дата звернення : 01.09.2020).

9. Семеніхіна О. В., Друшляк М. Г. Інструментарій програми GeoGebra 5.0 і його використання для розв'язування задач стереометрії. *Інформаційні технології і засоби навчання*, 2014. Т. 44, №6. URL : <https://goo.su/1Nlt>. (дата звернення : 01.09.2020).

10. Лісняк А.О., В.М. Тархова, С.В. Чопоров Обчислювальні системи: метод. реком. до лабор. занять для студентів освітньо-кваліфікаційного рівня «бакалавр» напряму підготовки «Прикладна математика» . Запоріжжя: ЗНУ, 2014. 49 с.

11. Махней О. В. Лабораторний практикум у Maple : метод. реком. до проведення лабораторних занять. Івано-Франківськ : Видавничо-дизайнерський відділ Центру інформаційних технологій Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника, 2010. 32 с

12. Сіденко Л. М., Сіденко О. М. Побудова графіків функцій за допомогою програми Advanced Grapher. *Математика в школах України*, 2007. №13-1 URL : <https://cutt.ly/7paly7E>. (дата звернення : 01.09.2020).

Навчальне видання

Дригач Т. Г. – кандидат педагогічних наук, старший викладач кафедри математики та фізики Комунального закладу «Харківська гуманітарно-педагогічна академія» Харківської обласної ради.

**ПРОГРАМНІ ЗАСОБИ
ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ МАТЕМАТИЧНИХ ЗАДАЧ
Частина 1**

Методичні настанови до виконання індивідуальних завдань

Редактор: Дригач Т. Г.

Комп'ютерний набір і верстка: Дригач Т. Г.