Міністерство освіти і науки України
Департамент науки і освіти
Харківської обласної державної адміністрації
Комунальний заклад
«Харківська гуманітарно-педагогічна академія»
Харківської обласної ради

АЛГЕБРА І ГЕОМЕТРІЯ

Робочий зошит

Частина 1

ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

Харків
2019

УДК 378.016:512.64 (076.5)
Л59

Укладачі:

Дригач Т. Г. – кандидат педагогічних наук, старший викладач кафедри математики та фізики Комунального закладу «Харківська гуманітарно-педагогічна академія» Харківської обласної ради;

Босін М. Є. – доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри математики та фізики Комунального закладу «Харківська гуманітарно-педагогічна академія» Харківської обласної ради;

Брославська Г.М. – кандидат педагогічних наук, старший викладач кафедри математики та фізики Комунального закладу «Харківська гуманітарно-педагогічна академія» Харківської обласної ради.

Рецензенти:

Бородай Г. П. – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри математики та фізики Комунального закладу «Харківська гуманітарно-педагогічна академія» Харківської обласної ради;

Піротті Є. Л. – доктор технічних наук, професор, професор кафедри комп'ютерної математики та аналізу даних Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут».

Л 59 Алгебра і геометрія: робочий зошит / уклад. : Т. Г. Дригач, М. Є. Босін, Г. М. Брославська; Комунальний заклад «Харківська гуманітарно-педагогічна академія» Харківської обласної ради. – Харків, 2019.– Ч.1: Лінійна алгебра. – 92 с.

Робочий зошит призначений для вивчення дисципліни «Алгебра та геометрія», ефективного закріплення та систематизації матеріалу студентами за освітньо-кваліфікаційним рівнем бакалавр напряму підготовки 014.09 Середня освіта (Інформатика).

Робочий зошит «Алгебра і геометрія. Частина 1. Лінійна алгебра» розроблено відповідно до вимог освітньо-професійної програми підготовки фахівців з навчальної дисципліни «Алгебра і геометрія». В зошиті наведені стислі теоретичні відомості, приклади розв'язування завдань, питання для самоконтролю та різноманітні завдання з відповідних розділів, завдання для виконання контрольних робіт.

УДК 378.016:512.64 (076.5)

Рекомендовано до друку Науково-методичною радою Комунального закладу «Харківська гуманітарно-педагогічна академія» Харківської обласної ради
(Протокол № 6 від 16.04.2019 р.)

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Робочий зошит «Алгебра і геометрія. Частина 1. Лінійна алгебра» рекомендований для студентів спеціальності 014.09 Середня освіта (Інформатика), які вивчають дисципліну «Алгебра і геометрія».

Зошит складається з двох розділів: «Матриці і дії над ними. Визначник матриці, його властивості», «Системи лінійних рівнянь», кожен з яких починається з узагальнених теоретичних відомостей, прикладів розв'язування завдань та містить завдання для самостійного опрацювання, питання для самоконтролю, завдання для виконання контрольної роботи.

Нумерація прикладів є послідовною для всіх розділів, а нумерація завдань – в межах розділу.

Викладач може:

- ✓ при поясненні нового матеріалу використовувати теоретичний матеріал як опорні конспекти;
- ✓ проводити письмове або усне опитування за матеріалами робочого зошита;
- ✓ використовувати як завдання для ІНДЗ;
- ✓ рекомендувати студентам робочий зошит для самоосвіти;
- ✓ використовувати робочий зошит при підготовці до контрольних робіт, для повторення матеріалів курсу.

Студент може:

- ✓ виділяти теоретичні відомості у робочому зошиті;
- ✓ швидко знайти необхідну інформацію для виконання завдання;
- ✓ при підготовці до контрольної / самостійної роботи прочитати теоретичний матеріал й переглянути способи розв'язування відповідних завдань з теми;
- ✓ при підготовці до заліку / екзамену переглянути теоретичний матеріал, приклади розв'язування завдань та власні обчислення.

РОЗДІЛ 1. МАТРИЦІ І ДІЇ НАД НИМИ. ВИЗНАЧНИК МАТРИЦІ, ЙОГО ВЛАСТИВОСТІ

1.1. Поняття матриці. Види матриць. Дії над матрицями

Матрицею $A_{m\times n}$ називається прямокутна таблиця, складена з чисел, функцій, операторів, елементів інших множин, яка має m рядків й n стовпців. У подальшому будемо розглядати тільки матриці, які складаються з дійсних чисел.

Записується матриця у вигляді: $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$.

$(1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n)$ деякої множини. Елементи матриці $A=(a_{ij})$ нумеруються двома індексами.

Перший індекс i $(1 \le i \le m)$ елемента a_{ij} означає номер рядка, другий j $(1 \le j \le n)$ – номер стовпця, на перетині яких знаходиться цей елемент в матриці.

Якщо у матриці m рядків і n стовпців, то, за визначенням, вона має розмірність $m\times n$.

Матриці А і В називаються *рівними*, якщо всі $a_{ij}=b_{ij}$.

Дії над матрицями:

1) додавання матриць (тільки для матриць однакового розміру; щоб додати дві матриці, треба додати їх відповідні елементи);

2) добуток матриці на число (щоб помножити матрицю на число треба всі елементи матриці помножити на це число);

3) різниця матриць А–В визначається як сума матриць А і матриць В, помноженої на (–1);

4) добуток матриці на матрицю.

Операція множення двох матриць вводиться лише для узгоджених матриць.

Матриця А називається *узгодженою* з матрицею В, якщо кількість стовпців першої матриці А дорівнює кількості рядків другої матриці В. Якщо матриця А узгоджена з В, то взагалі це не означає узгодженість матриці В з А.

Добутком $C_{m\times n} = A_{m\times \kappa} \cdot B_{\kappa\times n}$ називається така матриця, довільний елемент якої c_{ij} дорівнює сумі добутків елементів і-го рядка матриці $A_{m\times \kappa}$ на відповідні елементи j-го стовпця матриці $B_{\kappa\times n}$.

Матриця -добуток завжди має стільки рядків як у першого множника, і стільки стовпців як у другого. Це правило називається правилом «рядок -стовпець».

Властивості операції множення:

1) $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
2) $(\alpha A) \cdot B = A \cdot (\alpha B) = \alpha \cdot (A \cdot B)$
3) $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$
4) $C \cdot (A + B) = C \cdot A + C \cdot B$.

Властивості операцій над матрицями:

1) $A + B = B + A$
2) $A + (B + C) = (A + B) + C$
3) $\alpha \cdot (\beta A) = (\alpha\beta) \cdot A$
4) $\alpha \cdot (A + B) = \alpha A + \alpha B$
5) $(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha A + \beta A$
6) $A + O = A$; $A - A = O$.

Приклад 1. Визначити розмірність матриці А, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & -14 \end{pmatrix}.$$

Дана матриця А містить 4 рядки та 5 стовпці, отже її розмірність 4×5.

Приклад 2. Виконати дії A + B, 2A – 3B, B + 5, AB, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \text{ і } B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \\ 15 & 7 & 20 \end{pmatrix}.$$

1) $A + B = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 12 & 15 & 18 \\ 22 & 15 & 29 \end{pmatrix}.$

2) $2A - 3B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \\ 14 & 16 & 18 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & -12 & -18 \\ -24 & -30 & -36 \\ -45 & -21 & -60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -8 & -12 \\ -16 & -20 & -24 \\ -31 & -5 & -42 \end{pmatrix}.$

3) $B + 5 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \\ 15 & 7 & 20 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \\ 15 & 7 & 20 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 15 & 12 \\ 15 & 7 & 25 \end{pmatrix}.$

4)

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 2 \cdot 8 + 3 \cdot 15 & 1 \cdot 4 + 2 \cdot 10 + 3 \cdot 7 & 1 \cdot 6 + 2 \cdot 12 + 3 \cdot 20 \\ 4 \cdot 2 + 5 \cdot 8 + 6 \cdot 15 & 4 \cdot 4 + 5 \cdot 10 + 6 \cdot 7 & 4 \cdot 6 + 5 \cdot 12 + 6 \cdot 20 \\ 7 \cdot 2 + 8 \cdot 8 + 9 \cdot 15 & 7 \cdot 4 + 8 \cdot 10 + 9 \cdot 7 & 7 \cdot 6 + 8 \cdot 12 + 9 \cdot 20 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 63 & 45 & 90 \\ 138 & 108 & 204 \\ 213 & 171 & 318 \end{pmatrix}.$$

Приклад 3. Записати транспоновану матрицю до матриці А, якщо $A = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 5 & 8 & 7 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$.

$A^{т} = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 1 \\ 4 & 8 & 3 \\ 2 & 7 & 9 \end{pmatrix}$.

Приклад 4. З'ясувати узгодженість матриць, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 6 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 8 & -4 & -2 \\ -11 & 5 & 4 \\ 4 & -2 & -2 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 6 & 9 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -8 & -16 & -28 \end{pmatrix}, K = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

Розмірність матриць визначається кількістю рядків та стовпців, отже $A_{3\times2}$, $B_{3\times2}$, $C_{3\times3}$, $E_{4\times4}$, $X_{4\times1}$, $K_{1\times4}$.

Узгодженими є матриці $C_{3\times3}$ і $A_{3\times2}$, $C_{3\times3}$ і $B_{3\times2}$, $E_{4\times4}$ і $X_{4\times1}$, $K_{1\times4}$ і $X_{4\times1}$, $K_{1\times4}$ і $E_{4\times4}$.

Приклад 5. Виконати множення матриць $K = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 6 & 5 \end{pmatrix}$ і $X = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Узгодженими є матриці $K_{1\times4}$ і $X_{4\times1}$ та $X_{4\times1}$ і $K_{1\times4}$.

$$K \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 6 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 28 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

$$X \cdot K = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 7 & 6 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8\cdot3 & 8\cdot7 & 8\cdot6 & 8\cdot5 \\ 4\cdot3 & 4\cdot7 & 4\cdot6 & 4\cdot5 \\ 0\cdot3 & 0\cdot7 & 0\cdot6 & 0\cdot5 \\ 2\cdot3 & 2\cdot7 & 2\cdot6 & 2\cdot5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 24 & 56 & 48 & 40 \\ 12 & 28 & 24 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 14 & 12 & 10 \end{pmatrix}.$$

1.1.1. До кожного виду матиць навести приклади.

Види матриць	
1) Якщо матриця складається з одного рядка, то вона називається *матрицею-рядком.*	
2) Якщо матриця складається з одного стовпця, то вона називається *матрицею-стовпцем.*	
3) Якщо кількість рядків матриці дорівнює кількості стовпців, то матриця *називається квадратною*. Матриця розміру $n \times n$ називається квадратною матрицею n-го порядку. Елементи $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ утворюють головну діагональ матриці.	
4) Матриця E з елементами $a_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ при } i = j, \\ 0 \text{ при } i \neq j \end{cases}$ називається *одиничною матрицею* n-го порядку.	
5) Якщо всі елементи матриці, крім елементів головної діагоналі, дорівнюють нулю, то матриця називається *діагональною.*	

Види матриць
6) Якщо всі елементи матриці дорівнюють нулю, то матриця називається *нульовою.*
7) Якщо $a_{mn} = a_{nm}$, то матриця називається симетричною.
8) Матриця, отримана з даної заміною кожного її рядка (стовпчика) стовпчиком (рядком), називається *транспонованою* до даної.
9) *Трикутна матриця* – квадратна матриця, всі елементи якої нижче або вище від головної діагоналі дорівнюють нулю. *Верхньотрикутна матриця* (права) – квадратна матриця, всі елементи якої нижче від головної діагоналі дорівнюють нулю. *Нижньотрикутна матриця* (ліва) – квадратна матриця, всі елементи якої вище від головної діагоналі дорівнюють нулю.

1.1.2. Встановити відповідності між видом матриці та матрицями.

1) матриця-рядок	$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
2) одинична матриця	$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 6 & 5 \end{pmatrix}$
3) матриця-стовпець	$\mathrm{K} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$
4) квадратна матриця	$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$
5) симетрична матриця	$\mathrm{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 8 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$
6) діагональна матриця	$\mathrm{B} = (9)$
7) нульова матриця	$\mathrm{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

1.1.3. З’ясувати симетричність матриць, записати матриці, транспоновані до даних.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -6 & 1 \\ -5 & 8 & 9 & 0 \\ 6 & -9 & 3 & 6 \\ 1 & 0 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 17 & 0 & 50 \\ 0 & 171 & 0 \\ 5 & 0 & 17 \end{pmatrix}.$$

1.1.4. Знайти помилку у розв’язанні та виправити, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 7 & 6 & 8 \end{pmatrix} \text{ та } B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & 7 & 8 \end{pmatrix}, \text{ то}$$

а) $A+B = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 9 \\ 1 & 8 & 7 \\ 7 & 12 & 8 \end{pmatrix};$

б) $4A = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 4 & 16 & 20 \\ 28 & 24 & 38 \end{pmatrix};$

в) $-4B + 4B = \begin{pmatrix} 12 & -20 & -24 \\ -4 & 16 & -8 \\ 0 & -28 & -32 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -12 & 20 & 24 \\ 4 & -16 & 8 \\ 0 & 28 & 32 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

1.1.5. Знайти матрицю C = 7A – B, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -5 \\ 3 & -6 & 4 \end{pmatrix}.$$

1.1.6. Знайти помилку та виправити.

а) Якщо матриця $A = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 4 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ і матриця $B = \begin{pmatrix} 9 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$, то

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 \cdot 9 + 8 \cdot 6 & 3 \cdot 5 + 8 \cdot 7 \\ 4 \cdot 9 + 2 \cdot 6 & 4 \cdot 5 + 2 \cdot 7 \\ 1 \cdot 9 + 5 \cdot 6 & 1 \cdot 5 + 5 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 + 48 & 15 + 56 \\ 36 + 12 & 20 + 14 \\ 9 + 30 & 5 + 35 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 65 & 71 \\ 48 & 34 \\ 39 & 40 \end{pmatrix}.$$

б) Якщо матриця А = $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ і матриця $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}$, то

$$\mathrm{A}\cdot\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 7 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot 3 + 3\cdot 2 & 1\cdot 4 + 3\cdot 1 & 1\cdot 5 + 3\cdot 7 \\ 4\cdot 3 + 2\cdot 2 & 4\cdot 4 + 2\cdot 1 & 4\cdot 5 + 2\cdot 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 7 & 26 \\ 16 & 24 & 34 \end{pmatrix}.$$

1.1.7. Заповнити пропущені місця.

Знайти $f(\mathrm{A})$, якщо $f(x) = 5x^2 - 6$, $\quad \mathrm{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

$$\mathrm{A}^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9+2 & 6+ \\ 3+4 & +16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & \\ & 18 \end{pmatrix}.$$

1) $5\mathrm{A}^2 = 5\begin{pmatrix} 11 & \\ & 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\cdot 11 & 5\cdot \\ & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 55 & \\ 35 & \end{pmatrix}$.

2) $-6\mathrm{E} = \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & 0 \\ 0 & \end{pmatrix}$.

3) $f(\mathrm{A}) = \begin{pmatrix} 55 & \\ 35 & \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} & 0 \\ 0 & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & 70 \\ 35 & \end{pmatrix}$.

1.1.8. Знайти значення $f(\mathrm{A})$, якщо $f(x) = x^2 + 5x - 7$,

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

1.2. Визначник матриці. Властивості визначників і способи обчислення

Мінором будь-якого елементу a_{ij} квадратної матриці порядку n називається визначник порядку *(n–1)*, матриці, яка виходить з первісної матриці в результаті викреслювання i-го рядка і j -го стовпця, на перетині яких стоїть елемент a_{ij}. Мінор елемента a_{ij} позначається M_{ij} .

Алгебраїчним доповненням A_{ij} елемента a_{ij} матриці A називається добуток $(-1)^{i+j} M_{ij}$, де M_{ij} –мінор елемента a_{ij}.

Визначником квадратної матриці порядку n (чи *визначником порядку* n) називається алгебраїчна сума усіх можливих добутків елементів матриці, що взяті по одному з кожного рядка та по одному з кожного стовпчика. Кожен такий добуток $a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \ldots a_{n\alpha_n}$ береться зі знаком «+» , якщо індекси $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ утворюють парну перестановку (кількість інверсій), та зі знаком «–», якщо індекси $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ утворюють непарну перестановку. Якщо розташувати доданки таким чином, щоб у перестановках перших індексів не було інверсій, то визначник n *-го* порядку можна записати у вигляді:

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{n} (-1)^{z} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \ldots a_{n\alpha_n}.$$

У даному виразі z – кількість інверсій у перестановці других індексів. Кількість доданків у розкладі визначника n *-го* порядку завжди дорівнює $n!$

Для практичного обчислення визначника застосовується *теорема*: визначник дорівнює сумі добутків елементів будь-якого рядка на свої ад’юнкти (алгебраїчні доповнення).

Наприклад, якщо вибрати *к*-рядок, то

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+J} a_{kj} M_{kj}.$$

Визначником матриці першого порядку, називається величина її елемента a_{11}. *Визначником матриці другого порядку,* називається число:

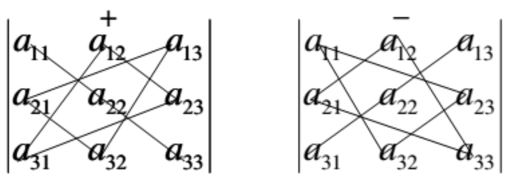
$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Визначник матриці третього порядку обчислюється за формулою:

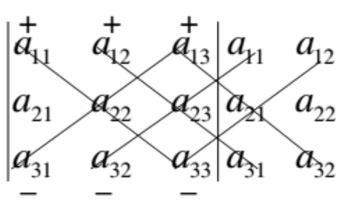
$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} -$$

$$-a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Цю формулу можна запам’ятати як правило трикутників,



або як правило діагоналей (правило Саррюса):



Вироджена матриця – квадратна матриця, визначник якої дорівнює нулю.

Невиродженою називають квадратну матрицю, визначник якої відмінний від нуля.

Властивості визначників матриць:

1. Визначник залишається незмінним при його транспонуванні (тобто заміна рядків на стовпці і навпаки не змінює результуюче значення). $\det A = \det A^т$.
2. Якщо всі елементи деякого рядка чи стовпця визначника дорівнюють нулю, то і сам визначник дорівнює нулю.
3. Якщо у визначнику замінити місцями два сусідні рядки чи стовпці, то визначник змінить знак на протилежний. Важливим тут є слово сусідні, оскільки якщо змінити 1 і 2 рядки то матимемо $-\det(A)$, якщо 1 і 3 то знак зміниться двічі, а два рази $-(-)$ дає $(+)$, матимемо $\det(A)$.
4. Значення визначника залишиться тим самим, якщо до будь-якого рядка (стовпця) додати інший, помножений на довільне число або лінійну комбінацію інших рядків.
5. Визначник, у якого рівні два однакові рядки чи стовпці, дорівнює нулю.
6. Спільний множник можна винести з рядка чи стовпця визначника і записати його перед визначником.
7. Сума попарних добутків елементів деякого рядка чи стовпця на відповідні алгебраїчні доповнення до іншого рядка чи стовпця визначника рівна нулеві.
8. Якщо елементи будь-якого рядка (стовпця) визначника записати у вигляді суми, то цей визначник можна подати у вигляді суми відповідних визначників.
9. Визначник рівний сумі добутків елементів будь-якого рядка (стовпця) на алгебраїчні доповнення до таких елементів.

Приклад 6. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 9 \end{vmatrix}$.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 4 \cdot 9 - 2 \cdot 3 = 30.$$

Приклад 7. При яких значеннях x перетвориться в нуль визначник $\begin{vmatrix} x & 2 \\ 18 & x \end{vmatrix}$.

$$\Delta = \begin{vmatrix} x & 2 \\ 18 & x \end{vmatrix} = x^2 - 36 = 0.$$

$x = \pm 6$.

Приклад 8. Обчислити мінори M_{11}, M_{21}, M_{32} та алгебраїчні доповнення до елементів a_{12}, a_{21}, a_{22} матриці $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 7 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & 11 \end{pmatrix}$.

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 6 & 11 \end{vmatrix} = 4 \cdot 11 - 6 \cdot (-2) = 44 + 12 = 56.$$

$$M_{21} = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 11 \end{vmatrix} = 5 \cdot 11 - 6 \cdot 3 = 55 - 18 = 37.$$

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 7 & -2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-2) - 3 \cdot 7 = -4 - 21 = -25.$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 7 & -2 \\ 0 & 11 \end{vmatrix} = -(7 \cdot 11 - 0 \cdot (-2)) = -77.$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 11 \end{vmatrix} = -(5 \cdot 11 - 6 \cdot 3) = -37.$$

$A_{22}= (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 11 \end{vmatrix} = 2 \cdot 11 - 0 \cdot 3 = 22.$

Приклад 9. Обчислити різними способами визначник матриці

$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 4 \\ 5 & -4 & -3 \end{pmatrix}.$

- 1 спосіб (розкладання за третім рядком):

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 4 \\ 5 & -4 & -3 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 5(12 + 5) +$$

$$+ 4(4 - 10) - 3(-1 - 6) = 85 - 24 + 21 = 82.$$

- 2 спосіб (правило Саррюса):

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 4 \\ 5 & -4 & -3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = (1 \cdot (-1) \cdot (-3) + 2 \cdot (-4) \cdot 5 + 5 \cdot 3 \cdot 4) -$$

$$- (5 \cdot (-1) \cdot 5 + 4 \cdot (-4) \cdot 1 + (-3) \cdot 3 \cdot 2) = 82.$$

- 3 спосіб (перетворення в нуль елементів рядка або стовпця крім одного)

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 4 \\ 5 & -4 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -7 & -6 \\ 0 & -19 & -28 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -7 & -6 \\ -19 & -28 \end{vmatrix} =$$

$$= 196 - 114 = 82.$$

Пояснення:

1. Додаємо до другого рядка перший, помножений на –2;

додаємо до третього рядка, перший, помножений на –5.

2. Розкладемо визначник за елементами першого стовпця.

3. Обчислимо як визначник другого порядку.

При обчисленні визначника матриці різними способами відповідь має бути однаковою.

Приклад 10. Обчислити визначник матриці

$$C = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 4 & 2 \\ 5 & 6 & -2 & 1 \\ -3 & 4 & -7 & -2 \\ -8 & 1 & 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$|C| = \begin{vmatrix} 3 & -5 & 4 & 2 \\ 5 & 6 & -2 & 1 \\ -3 & 4 & -7 & -2 \\ -8 & 1 & 3 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -3 & 0 \\ 5 & 6 & -2 & 1 \\ 7 & 16 & -11 & 0 \\ -43 & -41 & 17 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -3 \\ 7 & 16 & -11 \\ -43 & -41 & 17 \end{vmatrix},$$

$$|C| = -7\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ -41 & 17 \end{vmatrix} - 43\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 16 & -11 \end{vmatrix} = -7\cdot(-140) - 43\cdot 59,$$

$$|C| = 980 - 2537 = -1557.$$

Пояснення:

1. До першого рядка додати третій.
2. Другий помножити на 2 і додати до третього.
3. Другий помножити на(–7), і додати до четвертого.
4. Розкласти визначник за елементами четвертого стовпця.
5. Розкласти визначник за елементами першого стовпця.
6. Обчислити як визначник другого порядку.

Приклад 11. Обчислити визначник матриці $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & -4 & 8 \end{pmatrix}$.

$$\Delta A = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & -4 & 8 \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} c & 0 \\ -4 & 8 \end{vmatrix} = a\cdot c\cdot 8 = 8ac.$$

Пояснення:

1. Розкласти визначник за елементами першого стовпця.

2. Розкласти визначник за елементами першого рядка.

1.2.1. Обчислити мінори та алгебраїчні доповнення до елементів a_{11}, a_{12}, a_{32} матриці $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1.2.2. Обчислити визначники $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & -7 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 4 & -4 \end{vmatrix}$.

1.2.3. Обчислити визначник матриці різними способами, якщо

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.2.4. Обчислити визначник матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

1.2.5. Знайти транспоновану матрицю до матриці A= $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ та обчислити їх визначники.

1.2.6. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 20 & 0 & 100 \\ 10 & -5 & 10 \\ 300 & -400 & 100 \end{vmatrix}$ раціональним способом.

1.2.7. Розкласти визначник матриці $A=\begin{pmatrix} 5 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ за елементами першого рядка й обчислити.

1.2.8. Обчислити визначник матриці A= $\begin{pmatrix} 5 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ за правилом Саррюса.

1.2.9. Обчислити визначник матриці A= $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ перетворенням в нуль елементів рядка або стовпця окрім одного.

1.2.10. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} a-c & a-c \\ a+c & a+c \end{vmatrix}$.

1.2.11. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} a-8 & a-4 \\ a+3 & a+2 \end{vmatrix}$.

1.2.12. Розв’язати рівняння $\begin{vmatrix} x-1 & x-3 \\ x & x+2 \end{vmatrix} = 0.$

1.2.13. Розв’язати рівняння $\begin{vmatrix} x & 0 & 1 \\ 2 & x+1 & 5 \\ x-1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0.$

1.2.14. Розв'язати нерівність $\begin{vmatrix} c & c+2 \\ c-2 & c+1 \end{vmatrix} < 4.$

1.2.15. Розв'язати нерівність $\begin{vmatrix} x^2 & x^3 \\ x^3 & x^6 \end{vmatrix} \geq 0.$

1.2.16. Розв'язати нерівність $\begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ x & 1 & 2 \end{vmatrix} > 19.$

1.2.17. Розв'язати нерівність $\begin{vmatrix} 2 & 0 & x \\ 6 & -1 & x+1 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix} \le 32.$

1.2.18. Розв’язати нерівність $\begin{vmatrix} 1 & x+1 & 2 \\ 4 & 3 & x-1 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} \le \begin{vmatrix} 2x & -9 \\ x & x \end{vmatrix}$.

Тест до розділу 1

1. Укажіть, які з матриць можна додавати:

а) прямокутні, однакового розміру	в) квадратні, однакового порядку
б) квадратні, різних порядків	г) прямокутні, різних порядків

2. Укажіть, які з матриць можна множити:

а) прямокутні, однакового розміру	в) квадратні, різних порядків
б) квадратні, однакового порядку	г) матрицю та транспоновану до неї

3. Укажіть правдиві твердження:

а) якщо AB = C і матриця C має 2 стовпці, то матриця B має 2 стовпці	в) якщо AB = C і матриця C має 2 стовпці, то матриця A має 2 стовпці;
б) якщо AB = C і матриця C має 2 рядки, то матриця A має 2 рядки	г) якщо AB = C і матриця C має 2 рядки, то матриця B має 2 рядки

4. Укажіть правдиві твердження. Визначник дорівнює нулю, якщо:

а) два його рядки пропорційні	в) один із рядків або стовпців визначника нульовий
б) рядок дорівнює одному із стовпців	г) елементи його головної діагоналі нульові

5. Яке перетворення матриці не змінює значення її визначника:

а) переставляння рядків	в) додавання до рядка іншого рядка
б) множення рядка на число	г) переставляння стовпців

6. Яка матриця називається виродженою? У якої:

а) визначник не дорівнює нулю	в) визначник дорівнює одиниці
б) визначник дорівнює нулю	г) визначник не дорівнює одиниці

7. Укажіть перетворення матриці, яке не змінює значення її визначника:

а) заміна всіх стовпців на відповідні рядки	в) додавання до рядка матриці деякого число, відмінного від нуля
б) множення рядка на число $k \neq 0$	г) множення стовпця на $k = 0$

8. Укажіть правдиві твердження. Транспонована матриця існує, якщо матриця:

а) прямокутна	в) одинична
б) не нульова	г) квадратна

9. Укажіть правдиві твердження. Якщо в матриці поміняти місцями перший та третій рядки, як зміниться її визначник?

а) не зміниться	в) дорівнюватиме нулю
б) зміниться на протилежний	г) збільшиться у три рази

10. Укажіть правдиві твердження. Що треба зробити, щоб обчислити визначник 3 порядку за правилом Саррюса?

а) дописати два рядки праворуч	в) дописати два рядки ліворуч
б) дописати два стовпці праворуч	г) дописати середній рядок двічі

11. Укажіть правдиве твердження. Будь-які матриці можна:

а) додавати	в) множити на число відмінне від нуля
б) множити	г) додавати і множити

Питання для самоконтролю до розділу 1

1. Як визначити розмір матриці?
2. Що називається елементами матриці?
3. Як позначити елемент, який знаходиться у 3 стовпці та 4 рядку?
4. Яка матриця називається квадратною?
5. Як визначити порядок квадратної матриці?
6. Яка матриця називається нульовою?
7. Яка матриця називається діагональною?
8. Яка матриця називається одиничною?
9. Які матриці називаються рівними?
10. Як виконати додавання матриць?
11. Чи можна додавати матриці різних розмірів?
12. Які матриці називаються рівними?
13. Як виконати множення матриць?
14. Як виконати множення матриці А на деяке число?
15. Яка матриця називається протилежною до даної.
16. Які існують лінійні операції над матрицями?
17. Як знайти матрицю транспоновану до даної?
18. Якщо існує добуток двох матриць АВ та ВА, чи свідчить це, що АВ = ВА?
19. Як визначити розмір добутку двох матриць?
20. Що означає що елемент a_{34} матриці А ?
21. Що називається мінором, доповненням до мінору?
22. Що називається алгебраїчним доповненням елемента c_{18}?
23. Як розкласти визначник матриці за елементами першої строки?
24. Яка матриця називається виродженою?
25. Яка матриця називається невиродженою?

26. З’ясувати чи добуток двох невироджених матриць є невиродженою матрицею.

27. З’ясувати чи є виродженою матриця, утворена при добутку двох матриць, одна з яких є виродженою.

28. У кому випадку існує добуток $A \cdot A$?

29. Які властивості операції транспонування матриці?

30. Які є способи обчислення визначника матриці?

31. До матриці якого розміру застосовується правило Саррюса?

32. Чи можна обчислити визначник квадратної матриці?

33. Чи можна обчислити визначник матриці п’ятого порядку?

34. Чи можна обчислити визначник квадратної матриці, яка має два однакові рядки?

35. Як зміниться визначник матриці при перестановці двох сусідніх рядків?

36. Як зміниться визначник матриці при перестановці двох сусідніх стовпців?

37. Якщо кожен елемент квадратної матриці порядку n збільшити в п’ять разів, як зміниться її визначник?

38. Якщо кожен елемент другого рядка квадратної матриці порядку *4* збільшити в п’ять разів, як зміниться її визначник?

39. Чому дорівнює визначник одиничної матриці?

40. Чому дорівнює визначник квадратної матриці 10 порядку, якщо кожен її елемент дорівнює 10?

41. Чому дорівнює визначник матриці, яка складається з одного елемента?

42. За якої умови не існує транспонованої матриці?

43. За якої умови не існує протилежної матриці?

Завдання контрольної роботи до розділу 1

Завдання №1. Обчислити (якщо це можливо):

а) A + B;

б) B – C;

в) –A.

В.1	$A = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -9 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$	$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 8 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$
В.2	$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & -5 \end{pmatrix}$	$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$
В.3	$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 10 & -2 \end{pmatrix}$	$C = \begin{pmatrix} -5 & 5 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}$
В.4	$C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 10 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 7 \\ -2 & 12 & 3 \\ -2 & 1 & 11 \end{pmatrix}$	$C = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
В.5	$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$	$C = \begin{pmatrix} 14 & 17 \\ 12 & 35 \end{pmatrix}$
В.6	$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -5 & -2 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 25 & -1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$	$C = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 0 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$
В.7	$A = \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 12 & -2 \\ 13 & 2 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} 11 & 2 \\ 15 & 10 \\ 30 & 2 \end{pmatrix}$	$C = \begin{pmatrix} 20 & 2 \\ 5 & 6 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$
В.8	$A = \begin{pmatrix} 44 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} -44 \\ -10 \\ -9 \end{pmatrix}$	$C = \begin{pmatrix} 440 \\ 100 \\ 90 \end{pmatrix}$
В.9	$A = \begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 3 & 13 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} 11 & 1 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$	$C = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$

В.10	$A = \begin{pmatrix} 44 \\ 10 \\ 9 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$	$C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 5 & -8 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$
В.11	$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 2 & 12 & 3 \\ 1 & 1 & 71 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} -3 & 50 & 2 \\ -2 & 20 & 9 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$	$C = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$
В.12	$A = \begin{pmatrix} 1 & 50 & 22 \\ 2 & 12 & 33 \\ 1 & 10 & 51 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 71 \end{pmatrix}$	$C = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 2 & 12 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$
В.13	$A = \begin{pmatrix} 9 & 19 \\ -3 & 13 \end{pmatrix}$	$A = \begin{pmatrix} 10 & -4 \\ 3 & -13 \end{pmatrix}$	$A = \begin{pmatrix} 11 & -22 \\ 40 & 33 \end{pmatrix}$
В.14	$A = \begin{pmatrix} 7 & -3 & 22 \\ 2 & 12 & 13 \\ 8 & 10 & 16 \end{pmatrix}$	$A = \begin{pmatrix} 11 & -3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$	$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 5 & -5 \end{pmatrix}$
В.15	$A = \begin{pmatrix} 14 & 12 \\ 17 & 59 \end{pmatrix}$	$A = \begin{pmatrix} -1 & 22 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$	$A = \begin{pmatrix} 1 & 50 & 22 \\ 2 & 12 & 33 \\ 1 & 10 & 51 \end{pmatrix}$
В.16	$A = \begin{pmatrix} 14 & 2 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$	$A = \begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$	$A = \begin{pmatrix} -1 & 35 & 22 \\ -2 & 12 & 13 \\ -1 & 10 & 1 \end{pmatrix}$

Завдання №2. Записати транспоновану, обернену, протилежну матриці до даної. Обчислити M_{23}, A_{32} кожної матриці.

В.1	$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & -5 \end{pmatrix}$	В.9	$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & 10 & 5 \end{pmatrix}$
В.2	$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$	В.10	$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
В.3	$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 7 \\ -2 & 3 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	В.11	$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 2 & 6 & -3 \\ 1 & 1 & 7 \end{pmatrix}$

В.4	$A=\begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	В.12	$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ -2 & 4 & -4 \\ 1 & 5 & -3 \end{pmatrix}$
В.5	$A=\begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & 9 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$	В.13	$A=\begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$
В.6	$A=\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$	В.14	$A=\begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 2 & -5 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$
В.7	$A=\begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$	В.15	$A=\begin{pmatrix} 3 & -5 & 6 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$
В.8	$A=\begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 6 \end{pmatrix}$	В. 16	$A=\begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Завдання № 3. Обчислити визначники матриць різними способами.

В.1	$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 6 & 4 & -1 \\ 7 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & -3 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 3 & -5 & 4 & 2 \\ 5 & 2 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \end{vmatrix}$
В.2	$\begin{vmatrix} 11 & 30 \\ -5 & 7 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 6 & 3 & 10 \\ 7 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 3 & -3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 & 1 \\ 3 & 5 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}$
В.3	$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 10 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 6 & 3 & 4 \\ 7 & 1 & 3 \\ 8 & 2 & 8 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 3 & -5 & 0 & 2 \\ 5 & 2 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$
В.4	$\begin{vmatrix} 8 & 7 \\ 9 & 5 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 6 & 3 & -1 \\ 7 & 1 & -2 \\ 9 & 18 & 27 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 3 & -5 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}$

B.5	$\begin{vmatrix} 40 & 30 \\ 30 & 5 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 6 & 3 & -1 \\ 7 & 14 & 21 \\ 2 & 2 & -3 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 3 & -5 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$
B.6	$\begin{vmatrix} 25 & 34 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 6 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 3 & -5 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & -2 & 1 \\ 3 & 5 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$
B.7	$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 6 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 18 & 2 & 3 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 3 & -3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$
B.8	$\begin{vmatrix} -4 & -3 \\ -2 & -5 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} -6 & 1 & -1 \\ 7 & 1 & -3 \\ 8 & 2 & -3 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 3 & -5 & 4 & 2 \\ 5 & 2 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 6 & 6 & 6 \end{vmatrix}$
B.9	$\begin{vmatrix} 21 & -3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 7 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 2 \\ 5 & 0 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & -1 & -2 \\ 0 & 8 & 3 & 1 \end{vmatrix}$
B.10	$\begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 11 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}$
B.11	$\begin{vmatrix} 90 & 13 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 6 & 3 & -1 \\ 7 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$
B.12	$\begin{vmatrix} 15 & 20 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 7 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 & 2 \\ 5 & 2 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \end{vmatrix}$
B.13	$\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 25 & 5 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 6 & 3 & -1 \\ 7 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 & 2 \\ 5 & 2 & -2 & 1 \\ 3 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}$
B.14	$\begin{vmatrix} 40 & 3 \\ 20 & 5 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 7 & 1 & -5 \\ 5 & 2 & -3 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

В.15	$\begin{vmatrix} 10 & 4 \\ 25 & 10 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 3 & -5 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$
В.16	$\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 10 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$

Завдання №4. Розв’язати рівняння / нерівність.

В.1	$\begin{vmatrix} 2 & 0 & x \\ 5 & -1 & x+1 \\ 4 & 4 & 3 \end{vmatrix} \leq 26$	В.9	$\begin{vmatrix} 2 & 0 & x \\ 12 & -1 & x+1 \\ 4 & 3 & 3 \end{vmatrix} \geq 32$
В.2	$\begin{vmatrix} x & 3 & 4 \\ 6 & 1 & x+1 \\ 4 & 0 & 3 \end{vmatrix} \leq -58$	В.10	$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5x \\ 2 & -1 & 2x+4 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 4$
В.3	$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -x \\ 1 & -1 & -x-2 \\ 5 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 25$	В.11	$\begin{vmatrix} 2 & 0 & x \\ 3 & -1 & 3x+1 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} \geq 20$
В.4	$\begin{vmatrix} 2 & 0 & x \\ 1 & 1 & x-10 \\ 4 & 2 & 30 \end{vmatrix} \leq 16$	В.12	$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 6x \\ 2 & -1 & -x+4 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 15$
В.5	$\begin{vmatrix} 2 & 0 & x \\ 12 & 1 & x+1 \\ 4 & 3 & 3 \end{vmatrix} \geq -12$	В.13	$\begin{vmatrix} x & 3 & 3 \\ 5 & -1 & 21 \\ x+4 & 4 & 3 \end{vmatrix} \leq 56$
В.6	$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -x \\ 2 & -1 & 2x-4 \\ 4 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 2$	В.14	$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5x \\ 1 & -1 & x+8 \\ 4 & -5 & -2 \end{vmatrix} = 24$
В.7	$\begin{vmatrix} x & 3 & 3 \\ 5 & -1 & 1 \\ x-4 & 4 & 3 \end{vmatrix} \leq -4$	В.15	$\begin{vmatrix} x & 3 & 3 \\ 0 & 5 & 41 \\ x+4 & 4 & 3 \end{vmatrix} \leq 5$
В.8	$\begin{vmatrix} 1 & 0 & x \\ 5 & 1 & 2x \\ 30 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 200$	В.16	$\begin{vmatrix} 5x & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 3x+1 \\ 4 & 0 & 3 \end{vmatrix} \leq -35$

РОЗДІЛ 2. СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

2.1. Методи розв'язування систем лінійних рівнянь

Розглянемо систему m лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) з n невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

де a_{ij}, $i = 1, 2,\ldots, m; j = 1, 2,\ldots, n$ – відомі коефіцієнти;

b_i, $i = 1, 2,\ldots, m$ – праві частини (чи вільні члени) також відомі;

$x_1, x_2, \ldots x_n$ – невідомі, які слід визначити.

Розв'язком системи називається деяка сукупність чисел $c_1, c_2, \ldots c_n$, яка при підстановці в кожне рівняння замість невідомих $x_1, x_2, \ldots x_n$, перетворює всі рівняння системи на тотожності.

Система називається *сумісною*, якщо вона має хоча б один розв'язок.

Система називається *несумісною,* якщо вона розв'язків не має.

Методи розв'язування системи лінійних рівнянь:

1. Розв'язування систем лінійних рівнянь за формулами Крамера.
2. Матричний метод розв'язування систем лінійних рівнянь.
3. Розв'язування систем лінійних рівнянь методом Гауса.

Розв'язування систем лінійних рівнянь за формулами Крамера

Система трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими має вигляд:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3. \end{cases}$$

Введемо позначення:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} \qquad \Delta_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

Якщо $\Delta \neq 0$, то система має єдиний розв'язок і його знаходять за формулами Крамера:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \qquad z = \frac{\Delta_z}{\Delta}$$

Якщо $\Delta = 0$, а одне з чисел Δ_x, Δ_y, Δ_z не дорівнює нулю, то система не має розв'язку.

При $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$ система може бути несумісною або мати безліч розв'язків.

Аналогічні формули Крамера справедливі для *n* лінійних рівнянь з *n* невідомими.

Матричний метод розв'язування систем лінійних рівнянь

Нехай задано систему *n* лінійних рівнянь з *n* невідомими

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Введемо матриці:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Тоді згідно з правилом множення матриць систему рівнянь можна записати одним матричним рівнянням з невідомою матрицею X: $A \cdot X = B$.

Якщо матриця A має обернену матрицю A^{-1}, $X = A^{-1} \cdot B$.

Ця формула називається матричним записом розв'язку системи рівнянь.

Матричним способом можна розв'язати систему тільки тоді, коли $\det A \neq 0$.

Обернену матрицю A^{-1} знаходимо за формулою:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

Отже, щоб розв'язати систему рівнянь достатньо знайти матрицю, обернену до матриці системи A, і помножити її на матрицю з вільних членів справа.

Розв'язування систем лінійних рівнянь методом Гауса

Метод Гауса – це метод послідовного виключення невідомих.

Розглянемо систему *n* лінійних алгебраїчних рівнянь відносно n невідомих

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}.$$

Складемо так звану розширену матрицю цієї системи

$$B = \left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots. & \ldots. & \ldots. & \ldots. & \ldots. & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} & b_n \end{array}\right).$$

За допомогою еквівалентних перетворень (працюючи тільки з рядками) розширену матрицю приводимо до виду

$$B' = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & a_{12}' & a_{13}' & \ldots & a_{1n}' & b_1' \\ 0 & 1 & a_{23}' & \ldots & a_{2n}' & b_2' \\ \ldots. & \ldots. & \ldots. & \ldots. & \ldots. & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & b_n' \end{array}\right)$$

і знаходимо послідовно x_n, $x_{n-1}, \ldots, x_2$, x_1.

Якщо за допомогою еквівалентних перетворень розширену матрицю системи привести до виду

$$B'' = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & b_1'' \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & b_2'' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & b_n'' \end{array}\right),$$

отримаємо іншу модифікацію методу Гауса. Вона має назву *методу Жордано-Гауса.*

Елементарні перетворення матриць

Елементарні перетворення матриці – перетворення матриці, в результаті яких зберігається еквівалентність матриць.

Таким чином, елементарні перетворення не змінюють множину розв'язків системи лінійних алгебраїчних рівнянь, яку представляє ця матриця.

Елементарними перетвореннями матриці називатимемо операції над матрицею наступних типів :

тип 1 - переставлення двох рядків або стовпців;

тип 2 - множення рядка або стовпця матриці на довільне число, відмінне від нуля;

тип 3 - додавання до якогось рядка (стовпця) матриці іншого рядка (стовпця), помноженого на деяке число, відмінне від нуля.

Дві матриці називають *еквівалентними*, якщо одна з них одержується з другої за допомогою скінченої кількості елементарних перетворень.

Якщо матриці A та B еквівалентні, то це записується так:

$$A \sim B.$$

Приклад 12. Розв'язати матричним способом систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 5 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = -1 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$$

Вводимо матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Обчислюємо визначник матриці А: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 56 \neq 0$.

Знайдемо алгебраїчні доповнення до відповідних елементів

$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 6 = 7.$

$A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -(2 - 9) = 7.$

$A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -4 - 3 = -7.$

$A_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -(3 - 8) = 5.$

$A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 12 = 13.$

$A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -(-2 - 9) = 11.$

$A_{31} = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 9 + 4 = 13.$

$A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -(3 + 8) = -11.$

$A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 6 = -5.$

Матриця A^{-1} є оберненою до матриці А.

$$A^{-1} = \frac{1}{56}\begin{pmatrix} 7 & 5 & 13 \\ 7 & 13 & -11 \\ -7 & 11 & -5 \end{pmatrix}.$$

Знаходимо розв'язок за формулою $X = A^{-1} \cdot B$,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{56}\begin{pmatrix} 7 & 5 & 13 \\ 7 & 13 & -11 \\ -7 & 11 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{56}\begin{pmatrix} 35 - 5 + 26 \\ 35 - 13 - 22 \\ -35 - 11 - 10 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{56}\begin{pmatrix} 56 \\ 0 \\ -56 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Отже $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = -1$.

Приклад 13. Розв'язати методом Крамера систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -1 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

Введемо позначення:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (3 - 2 + 6) - (9 + 1 - 4) = 1 \neq 0.$$

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 + 1 = -1.$$

$$\Delta x_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -(-1+3) = -2.$$

$$\Delta x_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1-6 = -5.$$

$$x = \frac{\Delta x_1}{\Delta} = \frac{-1}{1} = -1,\ y = \frac{\Delta x_2}{\Delta} = \frac{-2}{1} = -2,\quad z = \frac{\Delta x_3}{\Delta} = \frac{-5}{1} = -5.$$

Приклад 14. Розв'язати методом Гауса систему рівнянь

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 - x_3 = 5 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 5 \\ -2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 5. \end{cases}$$

Складемо розширену матрицю цієї системи

$$B = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & -3 & 5 \\ -2 & 3 & -3 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -5 \\ 0 & 4 & -6 & 10 \\ 2 & 1 & -3 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -5 \\ 0 & 4 & -6 & 10 \\ 0 & 5 & -5 & 15 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -5 \\ 0 & 4 & -6 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Отже, $x_3 = 1$,	$x_2 - x_3 = 3$	$x_1 - 2x_2 + x_3 = -5$
	$x_2 - 1 = 3$	$x_1 - 8 + 1 = -5$
	$x_2 = 4$,	$x_1 = 2$.

Приклад 15. Розв'язати методом Жордано-Гауса систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -4 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -3 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = -11. \end{cases}$$

Складемо розширену матрицю цієї системи

$$B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 2 & -3 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & -2 & -11 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & -5 & 3 & 5 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right).$$

Отже, $x_3 = 5$, $x_2 = 2$, $x_1 = -1$.

2.1.1. Розв’язати матричним способом систему рівнянь

$$\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + x_3 = 4 \\ -2x_1 + 4x_2 + 10x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

Вводимо матриці $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 1 \\ -2 & 4 & 10 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$\Delta A = \left|\begin{array}{ccc|cc} 5 & -3 & 1 & 5 & -3 \\ -2 & 4 & 10 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right| =$

$A_{11} =$

Матриця A^{-1} оберненою до матриці А.

$$A^{-1} = \frac{1}{} \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}.$$

Знаходимо розв'язок за формулою $X = A^{-1} \cdot B$,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} =$$

2.1.2. Розв'язати матричним способом систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0 \\ 6x_1 + x_2 - 3x_3 = 7 \\ -2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$$

2.1.3. Розв'язати методом Крамера систему рівнянь

$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 + x_3 = 5 \\ 6x_1 + 5x_2 - 3x_3 = -3 \\ 2x_1 - 3x_2 - 7x_3 = 1. \end{cases}$$

Введемо позначення:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 6 & 5 & -3 \\ 2 & -3 & -7 \end{vmatrix}$$

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} 5 & 4 & 1 \\ -3 & 5 & -3 \\ 1 & -3 & -7 \end{vmatrix}$$

$$\Delta x_2 = \begin{vmatrix} 5 & 5 & 1 \\ 6 & -3 & -3 \\ 2 & 1 & -7 \end{vmatrix}$$

$$\Delta x_3 = \begin{vmatrix} 5 & 4 & 5 \\ 6 & 5 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix}$$

$x = \frac{\Delta x_1}{\Delta} =$, $y = \frac{\Delta x_2}{\Delta} =$, $z = \frac{\Delta x_3}{\Delta} =$

2.1.4. Розв’язати методом Крамера систему рівнянь

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + 2x_3 = -5 \\ 2x_1 + 3x_2 + 9x_3 = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

2.1.5. Розв'язати методом Гауса систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = 3 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 6 \\ -3x_1 + x_2 - 4x_3 = -1. \end{cases}$$

Складемо розширену матрицю цієї системи

$$B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & -1 & 6 \\ -3 & 1 & -4 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & -10 & 8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 8 \end{array}\right) \sim$$

Отже, $x_3 =$

2.1.6. Розв'язати методом Гауса систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 5x_3 = -2 \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 3 \\ -2x_1 + 5x_2 + x_3 = -1. \end{cases}$$

Складемо розширену матрицю цієї системи

$$B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -5 & -2 \\ 1 & -5 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

2.1.7. Розв'язати методом Жордано-Гауса систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = -1 \\ -2x_1 + 5x_2 + 8x_3 = -2. \end{cases}$$

Складемо розширену матрицю цієї системи

$$B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ -2 & 5 & 8 & -2 \end{array}\right) \sim$$

2.1.8. Розв'язати методом Жордано-Гауса систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = -1 \\ 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 3 \\ -15x_1 + x_2 - 3x_3 = -5. \end{cases}$$

2.2. Загальна теорія систем лінійних рівнянь

Ранг матриці

Ранг матриці — порядок найбільших відмінних від нуля мінорів цієї матриці (такі мінори називаються базисними).

Зазвичай ранг матриці A позначається rang A або Rg A.

Властивості рангу матриці:

1. При транспонування матриці її ранг не змінюється.
2. Ранг матриці не зміниться, якщо переставити її рядки (стовпці).
3. Ранг матриці не зміниться, якщо помножити всі елементи її рядка (стовпця) на відмінне від нуля число.
4. Ранг матриці не зміниться, якщо до одного з її рядків (стовпців) додати інший рядок (стовпець), помножений на деяке число.
5. Ранг матриці не зміниться, якщо вилучити з неї рядок (стовпець), що дорівнює нулю.
6. Ранг матриці не зміниться, якщо вилучити з неї рядок (стовпець), який є лінійною комбінацією інших рядків (стовпців).

Канонічна матриця

Канонічна матриця – це матриця, у якої на початку головної діагоналі стоять підряд декілька одиниць (кількість яких може дорівнювати нулю), а всі інші елементи дорівнюють нулю.

Звести до канонічного вигляду можна за допомогою елементарних перетворень:

1. Перестановка двох довільних рядків (стовпців);
2. Множення рядка (стовпця) на відмінне від нуля число;
3. Додавання до елементів будь-якого рядка (стовпця) матриці відповідних елементів іншого рядка (стовпця), помножених на одне й те саме число.

Теорема Кронекера – Капеллі

Для того, щоб система лінійних рівнянь була сумісною, необхідно і достатньо, щоб ранг її основної матриці дорівнював рангу розширеної матриці.

Rg A – ранг основної матриці системи лінійних рівнянь,
Rg $\tilde{A}$ – ранг розширеної матриці системи лінійних рівнянь,
n – кількість невідомих елементів.

Наслідки:

1. Якщо ранг сумісної системи дорівнює кількості невідомих, то система має єдиний розв'язок:

Rg A= Rg $\tilde{A} = n$	система сумісна і має єдиний розв'язок

2. Якщо ранг системи менший від кількості невідомих, то система має безліч розв'язків:

Rg A= Rg $\tilde{A} < n$	система сумісна, невизначена, має безліч розв'язків

3. Якщо ранг основної матриці менший від рангу розширеної матриці, то система несумісна:

Rg A $<$ Rg $\tilde{A}$	система несумісна, тобто не має розв'язків

Метод Крамера, матричний спосіб, метод Гауса, метод Жордано-Гауса застосовуються за умови, якщо Rg A= Rg $\tilde{A} = n$.

Системи лінійних однорідних рівнянь

Системи лінійних рівнянь називаються однорідними, якщо праві частини рівнянь дорівнюють нулю.

Однорідна система *m* лінійних рівнянь з *n* невідомими має вигляд:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}.$$

Ця система завжди має нульовий розв’язок: $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$.

Ненульовий розв’язок даної системи (якщо він є) можна знайти методом Гауса.

Якщо $n = m$ і визначник Δ системи дорівнює нулю ($\Delta=0$), то однорідна система має безліч ненульових розв’язків.

Нехай дано систему двох однорідних лінійних рівнянь з трьома невідомими

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = 0, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = 0 \end{cases} \qquad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

Розв’язок такої системи можна знайти за формулами

$$x = t\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}, \; y = -t\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}, \quad z = t\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

де t– довільне число.

Аналогічно для системи з трьох однорідних рівнянь з трьома невідомими, за умови $\Delta = 0$ і у визначнику Δ існує хоча б один відмінний від нуля мінор другого порядку.

Приклад 16. Звести до канонічного вигляду матрицю

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -7 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

1. До 2 рядка додаємо 4, помножений на –2.

2. До 3 рядка додаємо 1, помножений на –1.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -7 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -4 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

3. Помножити 4 рядок на –1 і зробити його першим.

4. Перший рядок помножити на –1 і зробити його другим.

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Додаємо до 1 рядка 2, помножений на –4.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Шукана матриця є канонічною.

Приклад 17. Звести до канонічного вигляду матрицю A та визначити її ранг, якщо $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 \\ 4 & 1 & 0 & -1 \\ -5 & 5 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 8 & 6 \end{pmatrix}$.

1. Додаємо до 2 рядка 1, помножений на –4.

2. Додаємо до 3 рядка 1, помножений на 5.

3. Додаємо до 4 рядка 1, помножений на –3.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & -7 & 4 & 11 \\ 0 & 15 & -4 & -15 \\ 0 & -6 & 11 & 15 \end{pmatrix}.$$

4. Додаємо до 3 рядка 2, помножений на 2.

5. Додаємо до 4 рядка 2, помножений на –1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & -7 & 4 & 11 \\ 0 & 1 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 7 & 4 \end{pmatrix}.$$

6. Додаємо до 2 рядка 3, помножений на 8.

7. Додаємо до 3 рядка 4, помножений на –1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 36 & 67 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 7 & 4 \end{pmatrix}.$$

8. Поділимо 3 рядок на –3.

9. Додаємо до 2 рядка 4, помножений на –1.

10. Додаємо до 1 рядка 4, помножений на –2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -15 & -11 \\ 0 & 0 & 29 & 63 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 7 & 4 \end{pmatrix}.$$

11. Змінимо порядок рядків.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -15 & -11 \\ 0 & 1 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 29 & 63 \end{pmatrix}.$$

12. Додаємо до 1 рядка 3, помножений на 15.

13. Додаємо до 4 рядка 3, помножений на –29.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 34 \end{pmatrix}.$$

14. Поділимо 4 рядок на 34.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

15. Додаємо до 1 рядка 4, помножений на –4.

16. Додаємо до 2 рядка 3, помножений на –7.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

17. Додаємо до 2 рядка 4, помножений на 3.

18. Додаємо до 3 рядка 4, помножений на –1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отримана матриця має канонічний вигляд.

Rg A = 4.

Приклад 18. Визначити ранг матриці $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Оскільки матриця А містить нульові стовпці, то їх можна відкинути.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 10 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 7 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отже Rg A = 2.

Приклад 19. Дослідити на сумісність систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2 \\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 3 \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 13x_5 = 9 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 4. \end{cases}$$

Знайдемо одночасно ранги розширеної та основної матриць.

$$\tilde{A}=\left(\begin{array}{ccccc|c}2&-1&1&2&3&2\\6&-3&2&4&5&3\\6&-3&4&8&13&9\\4&-2&1&1&2&4\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccccc|c}2&-1&1&2&3&2\\0&0&-1&-2&-4&-3\\0&0&2&4&8&6\\0&0&-1&-3&-4&0\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccccc|c}2&-1&1&2&3&2\\0&0&-1&-2&-4&-3\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&-1&0&3\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccccc|c}2&-1&0&0&-1&-1\\0&0&-1&-2&-4&-3\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&-3\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccccc|c}2&-1&0&0&-1&-1\\0&0&-1&0&-4&-9\\0&0&0&1&0&-3\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccccc|c}2&-1&0&0&-1&-1\\0&0&-1&0&-4&-9\\0&0&0&1&0&-3\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccccc|c}1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right).$$

Отже, Rg A= Rg $\tilde{A}=3$, система рівнянь сумісна, так як $3<5$, $n=5$, то система має безліч розв'язків.

Приклад 20. Дослідити на сумісність систему рівнянь і розв'язати її, якщо вона сумісна

$$\begin{cases}2x_1-x_2-x_3=2\\3x_1+x_2-x_3=0\\4x_1+3x_2-x_3=-1.\end{cases}$$

Знайдемо одночасно ранги розширеної та основної матриць.

$$\left(\begin{array}{ccc|c}2&-1&-1&2\\3&1&-1&0\\4&3&-1&-1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}2&-1&-1&2\\1&2&0&-2\\0&5&1&-5\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&0&-2\\0&5&1&-5\\2&-1&-1&2\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&0&-2\\0&5&1&-5\\0&-5&-1&6\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&0&-2\\0&5&1&-5\\0&0&0&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{array}\right)$$

Отже, Rg A= 2, Rg $\widetilde{A}=3$, система рівнянь несумісна, так як $2\neq3$.

Приклад 21. Дослідити на сумісність систему рівнянь і розв'язати її, якщо вона сумісна

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 12 \\ 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 1. \end{cases}$$

Знайдемо ранг основної матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \\ 3 & -4 & 2 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \\ 3 & -4 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -7 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -17 \\ 0 & -1 & -5 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отже, $\mathrm{Rg}A = 3$.

Знайдемо ранг розширеної матриці $\widetilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -3 & 12 \\ 3 & -4 & 2 & 1 \end{array}\right)$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -3 & 12 \\ 3 & -4 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 13 \\ 0 & -7 & -1 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 13 \\ 0 & -1 & -5 & 24 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -4 & 25 \\ 0 & 0 & -17 & 85 \\ 0 & -1 & -5 & 24 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -4 & 25 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 5 & -24 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Отже, $\mathrm{Rg}\,\widetilde{A} = 3$.

Так як $\mathrm{Rg}A = \mathrm{Rg}\,\widetilde{A} = 3$, то система сумісна. Кількість невідомих також дорівнює 3, і система має єдиний розв'язок.

Розв'яжемо методам Жордано-Гауса.

$$\widetilde{\mathrm{A}} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -3 & 12 \\ 3 & -4 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{array}\right).$$

$x_1 = 5$, $x_2 = 1$, $x_3 = -5$.

Приклад 22. Дослідити на сумісність систему рівнянь і розв'язати її, якщо вона сумісна

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 = -1 \\ x_1 - x_2 - x_3 = -2. \end{cases}$$

Знайдемо ранги основної та розширеною матриць.

$$\widetilde{\mathrm{A}} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 1 \\ 2 & 1 & -5 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

$$\mathrm{Rg}\,\widetilde{\mathrm{A}} = \mathrm{Rg}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = 2.$$

RgA = 2, отже система сумісна.

Система має безліч розв'язків, так як ранг менший за число невідомих. Виразимо невідомі через інші.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 1 \\ x_2 - x_3 = 1 \end{cases},$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 4x_3 + 1 \\ x_2 = x_3 + 1 \end{cases},$$

$$\begin{cases} x_1 = -2x_2 + 4x_3 + 1 = -2(x_3 + 1) + 4x_3 + 1 = 2x_3 - 1 \\ x_2 = x_3 - 1 \end{cases}.$$

Отже $x_1 = 2x_3 - 1$, $x_2 = x_3 - 1$, $x_3 \in$ R.

Приклад 23. Розв’язати систему рівнянь

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \\ 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Мамо однорідну систему лінійних рівнянь, в якій кількість невідомих дорівнює кількості рівнянь, тому знайдемо визначник матриці системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 3 & -5 & 2 \end{vmatrix}\begin{matrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 3 & -5 \end{matrix}\Bigg| = (-2 - 27 + 10) - (-3 - 15 + 12) = -13 \neq 0.$$

Отже, система має лише тривіальний розв’язок, тобто $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

Приклад 24. Розв’язати систему однорідних рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + 9x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases}$$

Система має тривіальний розв’язок, тобто $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

Оскільки кількість невідомих більша ніж ранг матриці, то система має безліч розв’язків за умови $\Delta \neq 0$.

$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} = 9 - 4 = 5 \neq 0.$

$x_1 = t \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 9 & -3 \end{vmatrix} = 3t,$

$x_2 = -t \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = t,$

$x_3 = t \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} = 5t.$

Оскільки $x_2 = t$, то $x_1 = 3x_2$, $x_2 \in R$, $x_3 = 5x_2$.

Приклад 25. Обчислити значення параметра a, для якого система має нетривіальний розв'язок, і знайти ці розв'язки

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ 5x_1 + ax_2 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Система має нетривіальний розв'язок, якщо $\Delta = 0$.

$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 5 & a & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 1 \\ 5 & a \\ 2 & 1 \end{matrix}\Bigg| = (a - 10) - (-4a + 5) = 5a - 15 = 0,\ a = 3.$

За умови, що хоча б один мінор другого порядку відмінний від нуля ($\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 5 = -2 \neq 0$), можна використати формули:

$x_1 = t\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 6t,$

$x_2 = -t\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = -10t,$

$x_3 = t\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -2t.$

Оскільки $x_3 = -2t$, то $x_1 = -3x_3$, $x_2 = 5x_3$, $x_3 \in R$.

2.2.1. Звести до канонічного вигляду матрицю $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$.

2.2.2. Звести до канонічного вигляду матрицю, визначити її ранг, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -6 \\ 2 & 7 & 4 \\ 5 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

2.2.3. Звести до канонічного вигляду матрицю A, визначити її ранг, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -6 \\ 5 & 10 & -15 \end{pmatrix}.$$

2.2.4. Звести до канонічного вигляду матрицю

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 8 \\ 2 & -2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

2.2.5. Визначити ранг матриці A= $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 6 & 0 \\ -3 & 10 & 7 & 0 & 5 \\ 10 & 3 & 0 & 12 & 0 \end{pmatrix}$.

2.2.6. Дослідити на сумісність систему рівнянь

$$\begin{cases} x - 2y = 6 \\ 8x + 5y = 1. \end{cases}$$

2.2.7. Дослідити на сумісність систему рівнянь

$$\begin{cases} 6x - 3y + 7z = 5 \\ 4x + 2y - z = 10 \\ 3x - 3y + 2z = -1. \end{cases}$$

2.2.8. Дослідити на сумісність систему рівнянь

$$\begin{cases} -2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + 4x_4 = 0 \\ -x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 2 \\ -x_1 + 2x_3 + 3x_4 = 3. \end{cases}$$

2.2.9. Дослідити на сумісність систему рівнянь. У випадку сумісності системи знайти її розв'язок:

а) $\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 3. \end{cases}$

б) $\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x - 2y = 5. \end{cases}$

2.2.10. Дослідити на сумісність систему рівнянь. У випадку сумісності системи знайти її розв’язок:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -1 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = -1. \end{cases}$$

2.2.11. Дослідити на сумісність систему рівнянь. У випадку сумісності системи знайти її розв'язок:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$$

2.2.12. З'ясувати кількість розв'язків однорідної системи рівнянь, розв'язати її.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

Мамо однорідну систему лінійних рівнянь, в якій кількість невідомих дорівнює кількості рівнянь, тому знайдемо визначник матриці системи

$$\Delta = \left|\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{matrix}\Bigg| =$$

2.2.13. *Р*озв'язати систему однорідних лінійних рівнянь

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

2.2.14. Обчислити значення параметра *a*, для якого система має нетривіальний розв'язок, і знайти ці розв'язки

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ ax_2 - 4x_3 = 0 \\ -2x_1 + x_2 - 4x_3 = 0. \end{cases}$$

Система має нетривіальний розв'язок, якщо Δ = 0.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & a & -4 \\ -2 & 1 & -4 \end{vmatrix} \begin{matrix} 3 & 2 \\ 0 & a \\ -2 & 1 \end{matrix} \Bigg| =$$

2.2.15. Знайти та виправити помилки, допущені при обчисленні значення параметра a, для якого система має нетривіальний розв'язок, і знайти ці розв'язки

$$\begin{cases} x_1 + ax_2 + 2x_3 = 0 \\ ax_1 + 4x_2 + ax_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання:

Система має нетривіальний розв'язок, якщо $\Delta = 0$.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a & 2 \\ 0 & 4 & a \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & a \\ a & 4 \\ 2 & 1 \end{matrix} = (4 + 2a + 2a) - (16 + a + a) = a^2 + a - 2 = 0.$$

$a^2 + a - 2 = 0$.

$D = 1 + 4 \cdot 12 = 49$,

$a_1 = \frac{1+7}{2} = 3$, $a_2 = \frac{1-7}{2} = -4$.

Розв'яжемо систему рівнянь при $a_1 = 3$.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

За умови, що хоча б один мінор другого порядку відмінний від нуля ($\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ = 3 – 6 = –3 ≠ 0), можна використати формули:

$x_1 = t \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = t,$

$x_2 = -t \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -3t,$

$x_3 = t \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -5t.$

Оскільки $x_1 = t$, то $x_1 \in R$, $x_2 = 3x_1$, $x_2 = -5x_3$.

Розв'яжемо систему рівнянь при $a_2 = -4$.

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 0 \\ -4x_1 + 4x_2 - 4x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

За умови, що хоча б один мінор другого порядку відмінний від нуля ($\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -4 & 4 \end{vmatrix}$ = 4 – 16 = –10 ≠ 0), можна використати формули:

$x_1 = t \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 8t,$

$x_2 = -t \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -4 \end{vmatrix} = -4t,$

$x_3 = t \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -4 & 4 \end{vmatrix} = 12t.$

Оскільки $x_2 = -4t$, то $x_1 = -2x_2$, $x_2 \in R$, $x_3 = -4x_3$.

Відповідь: $(x_1, 3x_1, -5x_3)$ та $(-2x_2, x_2, -3x_3)$.

2.2.16. Обчислити значення параметра *a*, для якого система має нетривіальний розв'язок, і знайти ці розв'язки

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ ax_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 - ax_2 + ax_3 = 0. \end{cases}$$

Тест до розділу 2

1.Укажіть правдиві твердження. Ранг матриці $A_{m\times n}$ — це:

а) кількість рядків m матриці A	в) найбільший порядок невиродженої підматриці
б) найбільше з чисел m та n	г) найбільша кількість лінійно незалежних стовпців матриці A

2. Укажіть правильну відповідь. Якщо ранг сумісної матриці дорівнює кількості невідомих, то система має

а) два розв'язки	в) безліч розв'язків
б) єдиний розв'язок	г) жодного розв'язку

3. Укажіть правильну відповідь. Якщо ранг системи менший від кількості невідомих, то система має

а) два розв'язки	в) безліч розв'язків
б) єдиний розв'язок	г) жодного розв'язку

4. Укажіть, за якої умови система лінійних рівнянь є сумісною

а) ранг матриці A не дорівнює рангу її розширеної матриці	в) ранг матриці A дорівнює рангу її розширеної матриці
б) ранг матриці A більший за ранг її розширеної матриці	г) ранг матриці A менший за ранг її розширеної матриці

5. Укажіть, за якої умови система лінійних рівнянь ($A \cdot X = B$) називається однорідною

а) якщо $A = 0$	в) якщо $X = 0$
б) якщо $A = 0$, $B = 0$	г) якщо $B = 0$

Питання для самоконтролю до розділу 2

1. Яка система рівнянь називається лінійною?
2. Яка система рівнянь називається сумісною?
3. Яка система рівнянь є несумісною?
4. Які існують способи розв’язування систем лінійних рівнянь?
5. Яка система рівнянь є визначеною?
6. Записати формули Крамера.
7. Чи може бути розв’язком системи лінійних рівнянь число нуль?
8. Пояснити принцип матричного способу розв’язування систем лінійних рівнянь.
9. За якої умови неможливо визначити розв’язки системи однорідних лінійних рівнянь методом Крамера?
10. Сформулювати теорему Кронекера- Капеллі.
11. Чи може невизначена система мати лише два розв’язки?
12. Скільки розв’язків має невироджена система?
13. Скільки розв’язків має вироджена система?
14. У якому випадку система лінійних рівнянь має єдиний розв’язок?
15. У якому випадку система лінійних рівнянь має безліч розв’язків?
16. Який розв’язок однорідної системи називається тривіальним?
17. Чи може однорідна система лінійних рівнянь бути несумісною?
18. Що називається прямим ходом метода Гауса?
19. Що називається зворотнім ходом метода Гауса?
20. Скільки розв’язків має система, якщо прямий хід метода Гауса привів матрицю до трикутного вигляду і на головній діагоналі елементи відмінні від нуля?
21. Пояснити суть метода Гауса.
22. За якої умови не існує оберненої матриці?

Завдання контрольної роботи до розділу 2

Завдання №1. Розв'язати матричним способом систему рівнянь

В.1	$\begin{cases} 2x_1+2x_2-3x_3=-2 \\ -2x_1+2x_2-x_3=-2 \\ 5x_1+3x_2-2x_3=11 \end{cases}$	В.9	$\begin{cases} 3x_1+2x_2-2x_3=4 \\ 5x_1+4x_2-3x_3=10 \\ 6x_1-x_2-2x_3=1 \end{cases}$
В.2	$\begin{cases} 2x_1+3x_2-4x_3=-6 \\ x_1+x_2-x_3=2 \\ 5x_1-2x_2-x_3=0 \end{cases}$	В.10	$\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=-2 \\ 2x_1+x_2+x_3=2 \\ x_1+2x_2+2x_3=-1 \end{cases}$
В.3	$\begin{cases} -2x_1-3x_2+5x_3=7 \\ x_1+5x_2-3x_3=5 \\ 2x_1-2x_2+x_3=2 \end{cases}$	В.11	$\begin{cases} 3x_1+2x_2+x_3=5 \\ 2x_1+3x_2+x_3=1 \\ 2x_1+x_2+3x_3=11 \end{cases}$
В.4	$\begin{cases} 2x_1+2x_2-x_3=2 \\ x_1+2x_2-3x_3=3 \\ -x_1+x_2+5x_3=3 \end{cases}$	В.12	$\begin{cases} 2x_1+2x_2+3x_3=0 \\ x_1-3x_2=1 \\ x_1-2x_2-x_3=1 \end{cases}$
В.5	$\begin{cases} 3x_1+4x_2+2x_3=8 \\ x_1+5x_2+x_3=0 \\ 2x_1-4x_2-3x_3=-1 \end{cases}$	В.13	$\begin{cases} 2x_1-x_2-x_3=4 \\ 3x_1+4x_2-2x_3=11 \\ 3x_1-2x_2+4x_3=11 \end{cases}$
В.6	$\begin{cases} 4x_1+4x_2+x_3=4 \\ x_1+3x_2+2x_3=2 \\ 2x_1-3x_2+2x_3=11 \end{cases}$	В.14	$\begin{cases} x_1+x_2+2x_3=-1 \\ 2x_1-x_2+2x_3=-4 \\ 4x_1+x_2+4x_3=-2 \end{cases}$
В.7	$\begin{cases} 2x_1-4x_2+5x_3=1 \\ 5x_1+2x_2+3x_3=2 \\ 3x_1-x_2+5x_3=0 \end{cases}$	В.15	$\begin{cases} 7x_1+2x_2+3x_3=13 \\ 9x_1+3x_2+4x_3=15 \\ 5x_1+x_2+3x_3=14 \end{cases}$
В.8	$\begin{cases} 4x_1+2x_2+x_3=7 \\ 2x_1+x_2-x_3=-2 \\ x_1-3x_2+2x_3=11 \end{cases}$	В.16	$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=7 \\ 2x_1+3x_2-x_3=6 \\ 3x_1+x_2-4x_3=3 \end{cases}$

Завдання №2. Розв'язати методом Крамера систему рівнянь

В.1	$\begin{cases} -2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 7 \\ x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 5 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$	В.9	$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11 \end{cases}$
В.2	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = -2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases}$	В.10	$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 8 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 - 3x_3 = -1 \end{cases}$
В.3	$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11 \end{cases}$	В.11	$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -2 \\ -2x_1 + 2x_2 - x_3 = -2 \\ 5x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 11 \end{cases}$
В.4	$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 13 \\ 9x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 15 \\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 = 14 \end{cases}$	В.12	$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 3 \\ -x_1 + x_2 + 5x_3 = 3 \end{cases}$
В.5	$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 4 \\ 5x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 10 \\ 6x_1 - x_2 - 2x_3 = 1 \end{cases}$	В.13	$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -6 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ 5x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$
В.6	$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2 \end{cases}$	В.14	$\begin{cases} 4x_1 + 4x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 11 \end{cases}$
В.7	$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 7 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -2 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 11 \end{cases}$	В.15	$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 - 3x_2 = 1 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$
В.8	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 6 \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 = 3 \end{cases}$	В.16	$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 1 \\ 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$

Завдання №3 . Розв'язати методом Жордано-Гауса систему рівнянь

В.1	$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 3 \\ -x_1 + x_2 + 5x_3 = 3 \end{cases}$	В.9	$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 - 3x_2 = 1 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$
В.2	$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11 \end{cases}$	В.10	$\begin{cases} -2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 7 \\ x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 5 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$
В.3	$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 8 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 - 3x_3 = -1 \end{cases}$	В.11	$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11 \end{cases}$
В.4	$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -2 \\ -2x_1 + 2x_2 - x_3 = -2 \\ 5x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 11 \end{cases}$	В.12	$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 13 \\ 9x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 15 \\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 = 14 \end{cases}$
В.5	$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2 \end{cases}$	В.13	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = -2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases}$
В.6	$\begin{cases} -2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 7 \\ x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 5 \\ 4x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}$	В.14	$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 1 \\ 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$
В.7	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 6 \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 = 3 \end{cases}$	В.15	$\begin{cases} 4x_1 + 4x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 11 \end{cases}$
В.8	$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -6 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ 5x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$	В.16	$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 7 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -2 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 11 \end{cases}$

Завдання №4. Чи є система сумісною? Скільки має розв'язків (якщо вони є)?

В.1	$\begin{cases}3x_1-2x_2-2x_3=4\\5x_1-4x_2-x_3=0\\6x_1-x_2-2x_3=1\end{cases}$	В.9	$\begin{cases}2x_1+2x_2-3x_3=-2\\-2x_1+2x_2-x_3=-2\\5x_1+3x_2-2x_3=11\end{cases}$
В.2	$\begin{cases}2x_1+2x_2+3x_3=0\\x_1-3x_2=1\\x_1-2x_2-x_3=1\end{cases}$	В.10	$\begin{cases}x_1+x_2+2x_3=-1\\2x_1-x_2+2x_3=-4\\4x_1+x_2+4x_3=-2\end{cases}$
В.3	$\begin{cases}x_1+2x_2-x_3=-2\\2x_1+x_2+x_3=2\\x_1+2x_2+2x_3=-1\end{cases}$	В.11	$\begin{cases}4x_1+4x_2+x_3=4\\x_1+3x_2+2x_3=2\\2x_1-3x_2+2x_3=11\end{cases}$
В.4	$\begin{cases}3x_1+2x_2-2x_3=4\\5x_1+4x_2-3x_3=10\\6x_1-x_2-2x_3=1\end{cases}$	В.12	$\begin{cases}2x_1-4x_2+5x_3=1\\5x_1+2x_2+3x_3=2\\3x_1-x_2+5x_3=0\end{cases}$
В.5	$\begin{cases}3x_1+2x_2+x_3=5\\2x_1+3x_2+x_3=1\\2x_1+x_2+3x_3=11\end{cases}$	В.13	$\begin{cases}3x_1+4x_2+2x_3=8\\x_1+5x_2+x_3=0\\2x_1-4x_2-3x_3=-1\end{cases}$
В.6	$\begin{cases}2x_1-x_2-x_3=4\\3x_1+4x_2-2x_3=11\\3x_1-2x_2+4x_3=11\end{cases}$	В.14	$\begin{cases}4x_1+2x_2+x_3=7\\2x_1+x_2-x_3=-2\\x_1-3x_2+2x_3=11\end{cases}$
В.7	$\begin{cases}7x_1+2x_2+3x_3=13\\9x_1+3x_2+4x_3=15\\5x_1+x_2+3x_3=14\end{cases}$	В.15	$\begin{cases}-2x_1-3x_2+5x_3=7\\x_1+5x_2-3x_3=5\\2x_1-2x_2+x_3=2\end{cases}$
В.8	$\begin{cases}2x_1+2x_2-x_3=2\\x_1+2x_2-3x_3=3\\-x_1+x_2+5x_3=3\end{cases}$	В.16	$\begin{cases}2x_1+3x_2-4x_3=-6\\x_1+x_2-x_3=2\\5x_1-2x_2-x_3=0\end{cases}$

Завдання №5. Для якого значення параметра t система має нетривіальний розв'язок? Знайти ці розв'язки.

B.1	$\begin{cases} 2x_1 + tx_2 + 6x_3 = 0 \\ 4x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 0 \\ 8x_1 + 4x_2 + 10x_3 = 0 \end{cases}$	B.9	$\begin{cases} x_1 + 3x_3 = 0 \\ 5x_1 + 2x_2 + tx_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$
B.2	$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0 \\ -4x_1 + 5x_2 + x_3 = 0 \\ -2x_1 + tx_3 = 0 \end{cases}$	B.10	$\begin{cases} 3x_2 + 6x_3 = 0 \\ 9x_1 + 12x_2 + 9x_3 = 0 \\ 6x_1 + tx_2 = 0 \end{cases}$
B.3	$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 + tx_3 = 0 \\ -4x_1 + tx_2 + x_3 = 0 \\ -2x_1 + 18x_3 = 0 \end{cases}$	B.11	$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 6x_3 = 0 \\ tx_1 + 6x_2 - 2x_3 = 0 \\ 8x_1 + tx_2 + 10x_3 = 0 \end{cases}$
B.4	$\begin{cases} 8x_1 + 4x_2 + 10x_3 = 0 \\ tx_1 - x_2 + 6x_3 = 0 \\ 4x_1 + 6x_2 - tx_3 = 0 \end{cases}$	B.12	$\begin{cases} x_1 + 3x_3 = 0 \\ tx_1 + 2x_2 - tx_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$
B.5	$\begin{cases} -x_1 + tx_2 - 5x_3 = 0 \\ -4x_1 + 5x_2 + x_3 = 0 \\ -tx_1 + 18x_3 = 0 \end{cases}$	B.13	$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ -4x_1 + 5x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + tx_3 = 0 \end{cases}$
B.6	$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + tx_3 = 0 \\ 4x_1 + tx_2 - 2x_3 = 0 \\ 8x_1 + 4x_2 + 10x_3 = 0 \end{cases}$	B.14	$\begin{cases} 3x_2 + tx_3 = 0 \\ 9x_1 + 2tx_2 + 9x_3 = 0 \\ tx_1 + 5x_2 = 0 \end{cases}$
B.7	$\begin{cases} x_1 - tx_3 = 0 \\ 5x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0 \\ tx_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$	B.15	$\begin{cases} 3x_2 + tx_3 = 0 \\ 9x_1 + 12x_2 + 9x_3 = 0 \\ tx_1 + 5x_2 = 0 \end{cases}$
B.8	$\begin{cases} 3x_2 + 6x_3 = 0 \\ tx_1 + 12x_2 + tx_3 = 0 \\ 6 + 5x_2 = 0 \end{cases}$	B.16	$\begin{cases} x_1 + 3x_3 = 0 \\ 5x_1 + tx_2 - 5x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 2tx_3 = 0 \end{cases}$

Відповіді

<table>
<tr>
<td>
1.1.5. $\begin{pmatrix} 27 & 19 & -10 \\ 28 & 0 & 19 \\ 4 & 20 & -4 \end{pmatrix}$.
1.1.8. $\begin{pmatrix} 7 & 18 & 2 \\ 41 & 26 & 6 \\ 24 & 16 & 2 \end{pmatrix}$.
1.2.1. $M_{11} = -5$, $M_{12} = 1$, $M_{32} = 5$,
$A_{11} = -5$, $A_{12} = -1$, $A_{32} = -5$.
1.2.2. –16; 0.
1.2.3. –4.
1.2.4. –6.
1.2.5. 0.
1.2.6. –180000.
1.2.7. 42.
1.2.8. 42.
1.2.9.13.
1.2.10. 0.
1.2.11. $-5a - 4$.
1.2.12. 0,5.
1.2.13. 9 / 19.
1.2.14. $(-\infty; 0)$.
1.2.15. $(-\infty; -1] \cup \{0\} \cup [1; +\infty)$.
1.2.16. $(1; +\infty)$.
1.2.17. $(-\infty; 2]$.
1.2.18. $[-1; +\infty)$.
</td>
<td>
<u>Тест до розділу 1.</u>
1. А, В.
2. Б, Г.
3. А, Б.
4. А, В.
5. В.
6. Б.
7. А.
8. А, Б, В, Г.
9. Б.
10. В.
11. В.
</td>
</tr>
<tr>
<td>
2.1.1. 4; 5; –1.
2.1.2. 1; –2; –1.
2.1.3. 3; –3; 2.
2.1.4. 5; 6; –3.
2.1.5. 5; 6; –2.
2.1.6. 7; 2; 3.
2.1.7. 6; –6; 5.
2.1.8. –1; 4; 8.
2.2.2. 3.
2.2.3. 1.
2.2.4. 3.
2.2.9. а) $\emptyset$; б) (1, 75; –0,75).
2.2.10. 1; 2; 3.
2.2.11.1; 2; 3.
2.2.12. 0; 0; 0.
2.2.13. $10X_2$; X_2; $13X_2$.
2.2.14. $a = 2$, $(-X_3; 2X_3; X_3)$.
2.2.16. $a = 2$, $(-0{,}8X_3; -0{,}2X_3; X_3)$.
$a = -3$, $(X_1; -X_1; 0)$.
</td>
<td>
<u>Тест до розділу 2.</u>
1. В, Г.
2. Б.
3. В.
4. В.
5. Г.
</td>
</tr>
</table>

ПІСЛЯМОВА

Робочий зошит «Алгебра і геометрія. Частина 1. Лінійна алгебра» сприяє закріпленню та систематизації теоретичних знань з розділів «Матриці і дії над ними. Визначник матриці, його властивості», «Системи лінійних рівнянь», допомагає детально зрозуміти способи виконання відповідних завдань, формує та перевіряє вміння студента.

Зошит корисний для самостійного опанування матеріалу, адже містить опорні конспекти, приклади виконання та завдання різного ступеня складності.

Питання для самоконтролю дозволяють студентам з’ясувати, чи не забули або не пропустили вони певну інформацію, стимулюють до більш глибокого вивчення цих питань.

Використання робочого зошиту «Алгебра і геометрія. Частина 1. Лінійна алгебра» дозволяє економити час на написання умови, використовувати такі завдання: «знайди помилку», «заповни пропущені місця», «встанови відповідності».

ВИКОРИСТАНІ ДЖЕРЕЛА

1. Бубняк Т. І. Вища математика: навч. посібник / Т. І. Бубняк. – Львів: «Новий світ-2000», 2006.
2. Єфіменко С. В. Вища математика. Аналітична геометрія та лінійна алгебра: метод. посіб. для студ. радіофізичного фак-ту напрям підготовки «Радіотехніка» / С.В.Єфіменко – Київ : КНУ, 2011 – 56 с.
3. Кононюк А. Ю. Вища математика (Модульна технологія навчання): навчальний посібник / А. Ю. Кононюк. В 2-х кн. Кн.1. – Київ : КТН, 2009. – 698 с.
4. Кривень А. В. Методичні вказівки для практичних занять та самостійної роботи з дисципліни «Лінійна алгебра та аналітична геометрія» / А.В. Кривень, О.П. Ясній, А. Р. Бойко. – Тернопіль : Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя, 2018. – 68 с.
5. Лінійна алгебра та аналітична геометрія : практикум / І. В. Алєксєєва, В. О. Гайдей, О. О. Диховичний, Л. Б. Федорова. – Київ : НТУУ «КПІ», 2013. – 180 с.
6. Лінійна алгебра та аналітична геометрія: навч. посібник / В. В. Булдигін, І. В. Алєксєєва, В. О. Гайдей, О. О. Диховичний, Н. Р. Коновалова, Л. Б. Федорова; за ред. проф. В. В. Булдигіна. – Київ: ТВіМС, 2011. – 224 с.
7. Назієв Е. Х. Лінійна алгебра та аналітична геометрія : навч. посіб. / Е. Х. Назієв, В. М. Владіміров, О. А. Миронець. – Київ : Либідь, 1997.– 149 с.
8. Рудавський Ю. К. Збірник задач з лінійної алгебри та аналітичної геометрії / Ю. К. Рудавський.– Львів : Бескид Біт, 2002. – 256 с.
9. Рудавський Ю. К. Лінійна алгебра та аналітична геометрія: навч. підручник / Ю. К. Рудавський, П. П. Костробій. – Львів : Бескід Біт, 2002.– 262 с.

Навчальне видання

Дригач Т. Г. – кандидат педагогічних наук, старший викладач кафедри математики та фізики Комунального закладу «Харківська гуманітарно-педагогічна академія» Харківської обласної ради.

Босін М. Є. – доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри математики та фізики Комунального закладу «Харківська гуманітарно-педагогічна академія» Харківської обласної ради.

Брославська Г. М. – кандидат педагогічних наук, старший викладач кафедри математики та фізики Комунального закладу «Харківська гуманітарно-педагогічна академія» Харківської обласної ради.

АЛГЕБРА І ГЕОМЕТРІЯ

Частина 1

ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

Робочий зошит

Редактор: Дригач Т. Г.

Комп'ютерний набір і верстка: Дригач Т. Г.