Міністерство освіти і науки України

Департамент науки і освіти

Харківської обласної державної адміністрації

Комунальний заклад

«Харківська гуманітарно-педагогічна академія»

Харківської обласної ради

МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ

Харків

2020

УДК 378.016:519.85 (072)

М 54

Укладачі:

Бородай Г.П. – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри математики та фізики Комунального закладу «Харківська гуманітарно-педагогічна академія» Харківської обласної ради;

Дригач Т. Г. – кандидат педагогічних наук, старший викладач кафедри математики та фізики Комунального закладу «Харківська гуманітарно-педагогічна академія» Харківської обласної ради.

Рецензенти:

Босін М.Є. – доктор фізико-математичних наук, професор завідувач кафедри математики та фізики Комунального закладу «Харківська гуманітарно-педагогічна академія» Харківської обласної ради;

Курпа Л.В. – доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри прикладної математики Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут».

М 54 Методи оптимізації: метод. рекоменд. / уклад. : Г. П. Бородай, Т. Г. Дригач ; Комунальний заклад «Харківська гуманітарно-педагогічна академія» Харківської обласної ради. – Харків, 2020.­­ – 107 с.

Методичні рекомендації призначені для вивчення дисципліни «Методи оптимізації» бакалаврами та магістрами гуманітарних спеціальностей. Оскільки ці студенти не вивчали докладно математичний аналіз, в першому та другому розділах наводиться необхідний матеріал з диференціального числення функцій однієї та кількох змінних. У додатку подано потрібні відомості з аналітичної геометрії.

Задачі математичного програмування ілюструються великою кількістю докладно розв’язаних прикладів. Наведено повний комплект індивідуальних завдань до усіх тем курсу, розв’язання яких є необхідним для засвоєння матеріалу.

УДК 378.016:519.85 (072)

*Рекомендовано до друку Науково-методичною радою Комунального закладу «Харківська гуманітарно-педагогічна академія» Харківської обласної ради*

*(Протокол № від р.)*

© ХГПА, 2020

© Бородай Г. П., Дригач Т. Г.

Зміст

|  |  |
| --- | --- |
| ПЕРЕДМОВА | 5 |
| Розділ 1. Екстремум функції однієї змінної | 6 |
| 1.1. Проміжки монотонності | 6 |
| 1.2. Екстремуми функції | 6 |
| 1.3. Найбільше й найменше значення функції | 10 |
| 1.4. Опуклість функції. Точки перегину | 10 |
| 1.5. Загальна схема дослідження функції та побудова її графіку | 12 |
| Розділ 2. Диференціальне числення функцій двох змінних | 16 |
| 2.1. Функції двох змінних та їх геометричне зображення | 16 |
| 2.2. Частинні похідні | 18 |
| 2.3. Диференціал функції двох змінних | 20 |
| 2.4. Похідна за напрямом. Градієнт. Лінії рівня | 21 |
| 2.5. Екстремум функції двох змінних | 24 |
| 2.6. Умовний екстремум | 26 |
| 2.7. Метод найменших квадратів | 30 |
| Розділ 3. Дослідження операцій | 33 |
| 3.1. Задача лінійного програмування | 33 |
| 3.1.1. Постановка задачі лінійного програмування | 33 |
| 3.1.2. Задача про оптимальний розподіл ресурсів | 34 |
| 3.1.3. Геометрична інтерпретація та графічний розв'язок задачі лінійного програмування | 35 |
| 3.1.4.Розв'язання задачі лінійного програмування симплекс-методом | 36 |
| 3.2. Задача цілочисельного програмування | 41 |
| 3.3. Двоїста задача лінійного програмування | 43 |
| 3.3.1. Економічна інтерпретація двоїстої задачі | 43 |
| 3.3.2. Взаємно-двоїсті задачі та їх властивості | 44 |
| 3.4. Транспортна задача | 48 |
| 3.4.1. Таблична модель транспортної задачі | 48 |
| 3.4.2. Складання початкового опорного плану | 50 |
| 3.4.3. Метод потенціалів | 50 |
| 3.4.4. Приклад розв'язання транспортної задачі | 51 |
| 3.5. Динамічне програмування | 55 |
| 3.5.1.Задача оптимального розподілу ресурсів | 55 |
| 3.5.2. Розв'язання задачі розподілу ресурсів методом ДП | 56 |
| 3.6. Теорія ігор | 60 |
| 3.6.1 Предмет теорії ігор. Антагоністичні матричні ігри | 60 |
| 3.6.2.Спрощення платіжної матриці. Розв'язання гри | 64 |
| 3.7. Прийняття рішень в умовах невизначеності | 66 |
| 3.8. Марковські процеси прийняття рішень | 69 |
| 3.8.1. Ланцюги Маркова з дискретним часом | 71 |
| 3.9. Модель динамічного програмування в марковській задачі | 76 |
| прийняття рішень |  |
| 3.10.Нелінійне програмування | 79 |
| 3.10.1. Опуклі множини та опуклі функції | 79 |
| 3.10.2. Безумовна оптимізація. Метод найшвидшого спуску | 80 |
| 3.10.3. Метод проекції градієнта | 83 |
| Індивідуальні завдання | 85 |
| Додаток. Деякі відомості з аналітичної геометрії | 100 |
| Д1. Різні види рівнянь прямої на площині | 100 |
| Д2. Відстань від точки до прямої | 102 |
| Д3. Розв'язок системи лінійних нерівностей | 103 |
| Д4.Обчислення кута між двома прямими | 103 |
| ПІСЛЯМОВА | 105 |
| Рекомендована література | 106 |
| Предметний покажчик | 107 |

Передмова

В житті постійно доводиться зустрічатися з необхідністю прийняти найкраще з можливих – оптимальне рішення. Надзвичайно велика кількість таких задач виникає в економіці, техніці.

В математиці дослідження задач на максимум та мінімум розпочалося близько 25 сторіч тому. Приблизно 300 років тому при формуванні математичного аналізу були створені загальні методи розв'язання задач на екстремум. У першому та другому розділах наведено необхідний математичний апарат та ці класичні методи розв'язання задач на екстремум.

В 40-х рр. минулого сторіччя, в період другої світової війни, з’явилась нова математична дисципліна, яка має назву дослідження операцій, оскільки вона виникла при аналізі та дослідженні військових операцій. Частиною цієї дисципліни є клас задач, який називають математичним програмуванням. Курс дослідження операцій з 50-х років викладається в багатьох університетах США, Великобританії та інших країн, а з 60-х років в університетах та інститутах України. Деякі з цих оптимізаційних методів, а саме наступні питання вивчаються в розділі 3:

* задача лінійного програмування, зокрема цілочисельного програмування, та двоїста задача лінійного програмування;
* транспортна задача та динамічне програмування;
* теорія ігор та прийняття рішень в умовах невизначеності;
* марковські ланцюги та модель динамічного програмування в рамках марковської задачі і прийняття рішень
* нелінійне програмування

Розглянуті в методичних рекомендаціях методи оптимізації ілюструються великою кількістю докладно розв'язаних приладів. До усіх методів наводяться завдання для самостійної роботи, виконання яких є обов'язковим для засвоєння матеріалу.

Розділ 1. ЕКСТРЕМУМ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

У різних сферах людської діяльності виникають задачі, в яких потрібно знайти найбільш вдалий (оптимальний) спосіб дії. Деякі з цих задач зводяться до відшукання максимумів та мінімумів функції однієї змінної. Розділ є вступом до вивчення оптимізаційних методів.

1.1. Проміжки монотонності функції

Теорема (Достатня умова монотонності). Якщо функція неперервна на відрізку , диференційована на інтервалі і  для , то функція  зростає (спадає) на відрізку.



|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | ( )  . |

Твердження *Р* Твердження *S*

(Якщо з твердження *Р* випливає твердження *S*, то кажуть, що *Р* достатньо для *S*).

Отже, знаходження проміжків монотонності функції зводиться до відшукування проміжків знакопостійності її похідної.

1.2. Екстремуми функції

Нехай функція неперервна в точці . Нагадаємо, що околом точки називається будь-який інтервал, що містить цю точку. Проколений окіл  точки це окіл, з якого виключена точка . Означення. Точка  називається точкою локального максимуму (мінімуму) функції , якщо існує проколений окіл точки , такий, що для всіх виконується нерівність

.

Іншими словами, в точці  локального максимуму (мінімуму) значення функції є найбільшим (найменшим), порівняно зі значеннями, яких вона набуває у сусідніх з  точках.

Точки локального максимуму і мінімуму називаються точками локального екстремуму, а значення функції у цих точках – екстремумами.

|  |  |
| --- | --- |
| Рис. 1.1 | Легко бачити, що точками локального екстремуму функції, графік якої наведено на рис. 1.1, є точки  , у яких  але ці два числа не рівні між собою. Точки  не є точками локального екстремуму. |

Необхідна умова локального екстремуму

Теорема 1 (П.Ферма). Нехай функція неперервна в точці  і має у цій точці локальний екстремум. Тоді або функція  не є диференційованою у точці .

Критичними точками неперервної функції називаються або точки, у яких похідна дорівнює нулю, або точки, у яких функція не є диференційованою (не має скінченної похідної).

Інакше кажучи, точки локального екстремуму функції треба шукати серед множини її критичних точок.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| – точка локального екстремуму функції |  | ,або,  або не існує. |

Таким чином, існування горизонтальної дотичної у точці  є необхідною умовою для того, щоб диференційована функція досягала локального екстремуму у внутрішній точці . Однак ця умова не є достатньою. Наприклад, дотична до графіка функції  в початку координат горизонтальна, але ця функція не досягає локального екстремуму в точці.

Достатні умови локального екстремуму Теорема 2. Точками локального екстремуму є ті точки з області визначення функції , при переході через які похідна  змінює знак. При цьому, якщо при переході через  у додатному напрямі осі знак  змінюється з “+” на “ – “ (з “ –“ на “+”), то точка є точкою локального максимуму (локального мінімуму).



|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Знак | |  | | – точка локального мінімуму | | |
| Знак | |  | | – точка локального максимуму |

**Приклад 1.2.1.** Знайти проміжки монотонності та екстремуми функції

****

**Розв’язання.1.** Обчислюємо****

2.Знаходимо корні похідної ****.

3. Нерівність . розв**’**язуємо методом інтервалів

Поведінка

Знак











З теореми 2 випливає що**** Обчислюємо

.****

4.Проміжки монотонності ****

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 1  3  1  2  Рис.1.2 | | | Оскільки  при  та  при , то ескіз графіка  буде таким :рис. 1.2.  Нехай функція є двічі диференційовною в точці **.**  **Теорема 3.** Нехай. Якщо , то– точка локального максимуму, якщо ж , то–точка локального мінімуму. | |
| , |  | – точка локального мінімуму (максимуму) функції . | |

Приклад 1.2.2. Дослідити на локальний екстремум функцію .

Розв’язання. Функція визначена на всій числовій осі, а її похідна . Зміна знаків похідної відбувається в точках (з “+” на “–“) та (з “–“ на “+”). В точці функція має локальний максимум, що дорівнює ; в точці – локальний мінімум, що дорівнює .



За теоремою 3 ,



1.3. Найбільше і найменше значення функції

У застосуваннях часто потрібно знайти , при якому функція досягає найбільшого або найменшого значення на даному відрізку.



З теореми, що функція неперервна на відрізку досягає найбільшого (найменшого) значення на, випливає, що для визначення найбільшого та найменшого значень неперервної функції на відрізку треба знайти значення функції у критичних точках, що належать цьому відрізку, та обчислити її значення на кінцях відрізку. Найменше та найбільше з отриманих чисел є відповідно найменшим та найбільшим значенням функції на відрізку.

Приклад 1.3.1. Знайти найбільше та найменше значення функції:

 на відрізку;

**Розв’язання.** **** .



Отже, екстремальними точками будуть точки –1 та 2. Обчислимо значення функції в екстремальних точках і на кінцях відрізка:

 , ,.

Отже, найменше значення функції дорівнює –44 та досягається на лівому кінці відрізка, а найменше значення функції дорівнює 8 та досягається у внутрішній точці відрізка:

 .

1.4. Опуклість функції. Точка перегину

Нехай функція  диференційовна на проміжку . .Означення. Назвемо функцію  опуклою вгору (вниз) на проміжку,  якщо графік цієї функції в околі будь-якої точки  даного проміжку розташований нижче (вище) дотичної, проведеної в точці. Точка називається точкою перегину функції , якщо в лівому півоколі точки графік функції розташований з одного боку

|  |
| --- |
|  |

Рис. 1.3

дотичної, проведеної у точці, а в правому півоколі – з іншого (рис. 1.3). Напрям опуклості функції визначається знаком похідної

Теорема 4. Якщо на деякому проміжку, то в цьому проміжку функція опукла вниз, якщо, то – вгору. Точками перегину є тільки ті точки з області визначення функції, при переході через які змінює знак.



Приклад 1.4.1. Визначити точки перегину і проміжки опуклості вниз та вгору функції. 

Розв’язання.

; 

.

Друга похідна набуває нульового значення при .

Ці три точки розбивають числову вісь на чотири проміжки.









Знак 





Функція опукла вгору на проміжках, і опукла вниз на проміжках. Точки , є точками перегину функції.

1.5. Загальна схема дослідження функції та побудова її графіка

Встановлені вище результати дозволяють чітко з усіма подробицями уявити поведінку графіка функції. Можна порадити при дослідженні функції та побудові її графіка додержуватись такої схеми:

1. Знайти область  визначення функції .

2. У тому випадку, якщо симетрична відносно початку координат, визначити парна або непарна ця функція . Перевірити, чи є ця функція періодичною.

3.З’ясувати питання про існування асимптот (вертикальних та похилих).

4. Знайти декілька характерних точок (зокрема координати точок перетину графіка з осями координат); визначити характер поведінки функції у межових точках множини. 

5. Знайти проміжки знакосталості функції.

Ці пункти схеми вже дозволяють побудувати ескіз графіка, який потім уточнюють.

6. Знайти проміжки монотонності та екстремуми функції.

7. Визначити проміжки опуклості функції та її точки перегину.

8. Побудувати графік функції за отриманими результатами.

Приклад 1.5.1 Побудувати графік функції .

Розв’язання. 1..

2. Функція не є ні парною, ні непарною. Функція неперіодична.

3. Оскільки  є точкою розриву другого роду, то пряма  буде

вертикальною асимптотою графіка функції. Оскільки  при , то пряма  буде похилою (горизонтальною) асимптотою графіка функції.

4. 

5. При , а при .

|  |  |
| --- | --- |
| Побудуємо ескіз графіка (рис.1.4).          Рис. 1.4  Складається враження, що функція має одну  точку екстремуму і одну точку перегину.  6. .  Рис.7.8 |  |

Похіднадорівнює нулю при  і не існує при .

Цими точками числова вісь розділяється на три проміжки . У першому і третьому проміжку функція спадає, а в другому – зростає. Оскільки при  функція невизначена, то  не є точкою екстремуму; в точці  буде локальний максимум.

7.;, якщо ;, якщо. Отже, точка  є точкою перегину функції.

Отримані дані дозволяють уточнити ескіз графіка (рис.1.5).

**Приклад 1.5.2..** Побудувати графік функції. ****

Розв’язання.

1..

2. Функція не є ні парною, ні. непарною, вона неперіодична.

|  |  |
| --- | --- |
| Рис. 1.5 | 3. .  4. Пряма  буде вертикальною асимптотою графіка функції (при цьому  при  і при ) , |

оскільки  при, то пряма  буде горизонтальною асимптотою графіка функції.

5. Зміна знака функції відбувається в точках і .





Знак















Знак















Знак













6. 





Знак













Отже, в точці  буде локальний максимум, що дорівнює, а в точці  буде локальний мінімум, що дорівнює 











Знак







У проміжках  і  функція опукла вниз, а в проміжках





















Рис. 1.6 77.11

,  – вгору. Точки , 2 є точками перегину функції:

, ; точка  не є точкою перегину, оскільки вона не входить до. 

Приклад 1.5.3. Побудувати графік функції

Розв’язання. 1. . Оскільки в знаменнику міститься парабола, то графік цієї функції симетричний відносно осі параболи



при .



1. Критична точка  Похідна  змінює знак з + на – при

|  |
| --- |
| .переході через точку, отже,  Рис.7.8  Рис.1.7 |



Нулі другоі похідної: ,;є точки перегину даної функції.

Розділ 2. Диференціальне числення функцій кількох змінних

У природознавстві і техніці часто зустрічаються випадки, коли одна величина залежить від двох чи більшої кількості інших величин. Наведемо приклади: відомий закон Бойля –­ Маріотта виражає залежність об'єму визначеної кількості газу від його тиску і абсолютної температури ; температура нерівномірно нагрітого тіла залежить від координат точки цього тіла.



2.1.Функції двох змінних та їх геометричне зображення

Нехай – деяка множина точок площини .



Означення 1. Якщо кожній точці ставиться у відповідність однозначно визначене число , то кажуть,що на множині задана числова функція двох змінних (функція точки) .



Аналогічно визначаються функції більшої кількості змінних.

Функції двох змінних можна наочно зобразити за допомогою просторової системи координат. Графіком функції буде сукупність точок простору з координатами . Ці точки утворюють деяку поверхню , рівняння якої (рис.1, а).



Наприклад, графіком функції  буде площина ; графік функції– параболоїд  (рис 2..2); графік функції  – верхня порожнина конуса  (рис.2.3) а графік функції – сідло (гіперболічний параболоїд)  (рис 2 4).

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| а Рис.2.1 | | | б |
| Рис.2.2 | Рис.2.3 | | |

Парабола



Парабола













Рис.2.4

Поняття границі і неперервності функції двох змінних у точці вводиться абсолютно аналогічно тому, як це робилося у випадку функції однієї змінної. Єдине, що тут потрібно, це дати поняття околу точки .



Означення 2. Околом точки називається така сукупність точок , яка містить у собі деякий круг з центром у точці .



Проколеним околом точки називається окіл , за винятком самої точки (див. рис. 2.1,б).



Означення 3. Число називається границею функції у точці , якщо для будь-якого околу числа знайдеться такий проколений окіл  точки , що для всіх точок  значення функції .



Інакше кажучи,  , якщо від-

стань  при будь-якому способі наближення точки  до

точки .

Означення 4. Приростом функції  у точці , який відповідає переходу до точки , називається величина .

Означення 5. Функція  називається неперервною у точці , якщо існує такий окіл  цієї точки, що значення функції у точках цього околу як завгодно мало відрізняються між собою: , якщо .

**2.2. Частинні похідні**

Нехай дана функція двох змінних . Зафіксуємо значення , тобто покладемо . Тоді функція двох змінних перетвориться на функцію  однієї змінної .

Означення. Похідна від функції  у точці  називається частинною похідною функції  за змінною  в точці .

Аналогічно визначається частинна похідна функції  за змінною  в точці .

Частинні похідні в точці  позначаються таким чином:

, , , .

Отже, .

Якщо ж мова йде про частинні похідні у довільній точці, то позначення набувають вигляду: , , , .

Відразу ж помітно, що частинні похідні від функції  є, взагалі кажучи, також функціями двох змінних.

Приклад 2.2.1. Знайти частинні похідні функцій:

1)  у точці ; 2)  у точці ; 3) .

Розв’язання.

1. При знаходженні частинної похідної за змінною  розглядаємо  як сталу величину:

, .

Розглянемо  як сталу величину та знайдемо частинну похідну за змінною :

, .

2) , . ,

. 3) , .

Іноді від частинних похідних та  потрібно знайти частинні похідні – так звані частинні похідні другого порядку. Для функції двох змінних їх чотири:

, , , .

Якщо друга і третя з написаних похідних є неперервними функціями, то вони збігаються .

Приклад 2.2.2 Знайти похідні другого порядку від функцій:

1) , 2) .

Розв’язання.

1) , ;

, .

2) , ;

, .

2.3. Диференціал функції двох змінних

Нехай функція  має скінченні частинні похідні , .

Означення 1. Функція  називається диференційованою в точці , якщо приріст функції у точці можна подати у вигляді

 (1)

Теорема 2.1. Якщо функція  має в околі  точки  частинні похідні, які неперервні в цій точці, то функція  є диференційованою в точці .

Означення 2. Якщо функція  є диференційованою в точці , то її диференціалом у цій точці називається величина:

.

Оскільки  та  незалежні змінні, то замість ,  можна використовувати позначення  та . Тоді запис диференціала набуває більш симетричного вигляду:

.

2.4. Похідна за напрямом. Градієнт. Лінії рівня

Нехай функція  визначена в деякому околі  точки  та диференційована в цій точці. Нехай  – довільний одиничний вектор, – промінь, який проведено з точки  у напряму вектора , *М* будь-яка точка проміня. Нагадаємо, що , де  і  – відповідно кути між і ортами і осей координат.

Похідна від функції  у точці  за напрямом визначається рівністю

. (1)

|  |  |
| --- | --- |
|  | Оскільки функція  є диференційованою у точці , то =  і, отже, |

 (2)

Похідна за напрямом характеризує швидкість зміни функції у точці  за напрямом . Частинні похідні  є відповідно швидкостями зміни функції у точці  за напрямами координатних осей ,.

Градієнтом диференційованої у точці  функції  називається вектор

. (3) знайдеться такий проколений окіл точки , що для всіх точок значення функції .



Інакше кажучи, , якщо від-



стань при будь-якому способі наближення точки до



точки .



Означення 4. Приростом функції у точці , який відповідає переходу до точки , називається величина .



Означення 5. Функція називається неперервною у точці , якщо існує такий окіл цієї точки, що значення функції у точках цього околу як завгодно мало відрізняються між собою: , якщо .



**2. Частинні похідні**

Нехай дана функція двох змінних . Зафіксуємо значення , тобто покладемо . Тоді функція двох змінних перетвориться на функцію однієї змінної .



Означення. Похідна від функції у точці називається частинною похідною функції за змінною в точці .



Аналогічно визначається частинна похідна функції за змінною в точці .



Частинні похідні в точці позначаються таким чином:



, , , .



Отже, .



Якщо ж мова йде про частинні похідні у довільній точці, то позначення набувають вигляду: , , , .



Відразу ж помітно, що частинні похідні від функції є, взагалі кажучи, також функціями двох змінних.



Приклад 1. Знайти частинні похідні функцій:

1) у точці ; 2) у точці ; 3) .



Розв’язання.

1. При знаходженні частинної похідної за змінною розглядаємо як сталу величину:



, .



Розглянемо як сталу величину та знайдемо частинну похідну за змінною :



, .



2) , . ,



. 3) , .



Іноді від частинних похідних та потрібно знайти частинні похідні – так звані частинні похідні другого порядку. Для функції двох змінних їх чотири:



, , , .



Якщо друга і третя з написаних похідних є неперервними функціями, то вони збігаються .



Приклад 2. Знайти похідні другого порядку від функцій:

1) , 2) .



Розв’язання.

1) , ;



, .



2) , ;



, .



3. Диференціал функції двох змінних

Нехай функція має скінченні частинні похідні , .



Означення 1. Функція називається диференційовною в точці , якщо приріст функції у точці можна подати у вигляді



(1)



ТЕОРЕМА. Якщо функція має в околі точки частинні похідні, які неперервні в цій точці, то функція є диференційовною в точці .



Означення 2. Якщо функція є диференційовною в точці , то її диференціалом у цій точці називається величина:



















.



Оскільки та незалежні змінні, то замість , можна використовувати позначення та . Тоді запис диференціала набуває



більш симетричного вигляду:

.



4. Похідна за напрямом . Градієнт. Лінії рівня

Нехай функція визначена в деякому околі точки та диференційовна в цій точці. Нехай – довільний одиничний вектор, а – промінь, який проведено з точки у напряму вектора , *М* будь-яка точка проміня. Нагадаємо , що , де і –відповідно кути між і ортами і осей координат.



Похідна від функції у точці за напрямом визначається рівністю



.



|  |  |
| --- | --- |
|  | Оскільки функція є диференційовною у точці , то =  і, отже, |

(2)



Скористуємось тепер формулою для скалярного добутку векторів, які задані своїми координатами, і знайдемо, що

=



|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Тоді формула (2) для похідної за напрямом набуває вигляду   |  | | --- | | (4) |   З іншого боку, оскільки , то за означенням скалярного добутку маємо |  |



і , отже , формулу (4) можна переписати таким чином

.



З останньої формули випливає такий наслідок: якщо напрям збігається з напрямом (тобто, кут дорівнює нулю ), то



.



Отже, вектор вказує напрям, в якому функція в точці найшвидше зростає, а його довжина дає величину відповідної похідної. Приклад 2.4.1. Знайти похідну функції у точці за напрямом вектора . Порівняти з максимальним значенням похідної у точці .Розв’язання. Знайдемо орт напряму . Обчислюємо за формулами (3)-(4):,



.



Лінії рівня

Нехай функція є диференційованою. Множина точок {(*x*;*y*):=} (– дійсне число ) називається лінією рівня функції . Наприклад: лінії рівня функції є концентричні кола з центром у початку координат, а функції– сім’я паралельних прямих .



Покажемо , що вектор є направленим по нормалі до лінії рівня, яка проходить через точку . Рівняння = задає залежність між і неявно. Якщо , то в околі точки існує явний вираз для цієї залежності. Тоді в околі точки має місце тотожність . Продиференціюємо цю тотожність з урахуванням того, що його ліва частина є складеною функцією від : . Звідси випливає, що кутовий коефіцієнт дотичної до лінії рівня у точці дорівнює (формула (\*) підр.1.5). Кутовий коефіцієнт прямої,,яка проходить через точкує .  Отже, градієнт перпендикулярний дотичної до лінії рівня.



2.5. Екстремум функції двох змінних

Означення точки локального максимуму (мінімуму) функції  повністю збігається з означенням для випадку функції однієї змінної: точка є точкою локального максимуму (мінімуму), якщо існує такий проколений окіл точки , що для всіх точок виконується нерівність



.



Приклад 2.5.1. 1) точка є точкою локального мінімуму функції . Дійсно, ,



(рис. 2.2).

2) точка не є точкою локального екстремуму функції . Дійсно, функція дорівнює нулю в точці , а в будь-якому околі цієї точки набуває як додатних, так і від’ємних значень: , (див. рис. 2.4).



Теорема 2.5.1. (Необхідні умови існування локального екстремуму)

Якщо точка є точкою локального екстремуму диференційованої функції , то її частинні похідні першого порядку в цій точці дорівнюють нулю



|  |  |
| --- | --- |
|  | (1) |

Точки, координати яких задовольняють системі (2.5.1), називаються **стаціонарними (критичними**), в цих точках може бути екстремум.

Таким чином, точки локального екстремуму диференційованої функції можуть знаходитися лише серед її стаціонарних точок.

Легко бачити, що рівність нулю частинних похідних першого порядку у якійсь точці ще не означає існування екстремуму в цій точці. Розглянемо, наприклад, функцію (підрозд.2.1, рис.2.4). Тоді , і точка є стаціонарною, проте не є точкою локального екстремуму.



Теорема 2.5.2 (Достатні умови існування локального екстремуму)

Нехай точка є критичною точкою функції .



Складається визначник .



Тоді точка :



1) є точкою локального мінімуму, якщо , ;



2) є точкою локального максимуму, якщо , ;



3) не є точкою локального екстремуму, якщо .



Зауваження. Якщо , то відповісти на питання про наявність екстремуму у точці не можна і потрібні додаткові дослідження.



Приклад 2.5.2. Дослідити на екстремум функцію .



Розв’язання. Знайдемо точки, у яких може бути екстремум. З цією метою розв’яжемо систему рівнянь (1)

, .



З останнього рівняння випливає, що , тоді . Отже, маємо дві стаціонарні точки:



; ..



Оскільки , , , то ; ;



У точці за правилом 3 теореми 2 екстремуму немає. Оскільки та то за правилом 1 теореми 2 у точці локальний мінімум .



27+9-72+36-27+5=–22.



2.6. Умовний екстремум

Задачі знаходження екстремуму функції не на всій області її визначення , а тільки на деякій лінії , рівняння якої називаються задачами на умовний екстремум.



Рівняння називається рівнянням зв’язку



Означення. Точка називається точкою локального умовного екстремуму функції відносно зв’язку , якщо є точкою локального екстремуму функції , що розглядається тільки на лінії .



Далі припускаємо, що має в околі точки неперервні частинні похідні до другого порядку включно та



Задача на умовний екстремум розв’язується методом Лагранжа, який відіграє велику роль при розв’язанні важливих сучасних задач оптимізації та складається з наступних кроків.

1) складаємо допоміжну функцію трьох змінних (функцію Лагранжа)

;



2) знаходимо частинні похідні цієї функції за змінними , , ; 3) прирівнюючи до нуля знайдені в п. 2) похідні та розв’язуючи отриману систему рівнянь, знаходимо стаціонарні (критичні) точки (точки можливого локального екстремуму);



4)Нехай є стаціонарною (критичною) точкою функції Лагранжа. Складається визначник



.



Якщо , то функція має у точці умовний максимум.



Якщо , то функція має у точці умовний мінімум.



Приклад 2.6.1. Знайти екстремуми функції при наявності зв’язку .



Розв’язання. Запишемо функцію Лагранжа



та отримаємо необхідні умови екстремуму. Якщо , то , що суперечить третьому рівнянню (рівнянню зв’язку). Помножимо перше рівняння на , а друге на та додавши перші два рівняння системи (2) виключаємо з системи змінну



(1)(2)



Помножимо друге рівняння останньої системи на –1 та додаємо до першого. Одержано квадратне рівняння або , корені якого . Для з другого рівняння системи (3) знайдемо , а для одержимо. Тобто а з першого або другого рівняння системи (3) знайдемо , , . Отже, стаціонарні точки функції Лагранжа є .Оскільки ,,, то у загальному вигляді



.



Перевіряємо стаціонарні точки на екстремум:

=–24



(;1) точка умовного максимуму;



точка умовного мінімуму;



=, =–8(0–04)=0. Для відповіді на питання чі є екстремум у точці , потрібно додаткове дослідження , яке тут проводити не будемо.



Приклад 2.6.2. Знайти екстремум функції при наявності зв’язку .



Розв’язання.





Помножимо перше рівняння на , а друге на та додавши ці рівняння виключаємо з системи змінну  та одержимо .

Із третього рівняння маємо ,  . З першого рівняння системи знайдемо ,Отже,стаціонарні точки функції Лагранжа є . Оскільки ,,, то, як і у попередньому прикладі обчислимо визначник у загальному вигляді



Перевіряємо стаціонарні точки на екстремум:

=–4 точка умовного максимуму; точка умовного мінімуму



7. Метод найменших квадратів

В практиці часто зустрічається задача про аналітичне описання результатів експерименту. Нехай за результатом експерименту одержана таблиця, яка визначає залежність величини від . Вигляд функції встановлюється за графіком, який будується за даними таблиці



|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | … |  |
|  |  |  | … |  |

Якщо експериментальні точки розташовані як на рис.2.5 то можна припустити, що і пов’язані лінійно ,якщо як на рис.2.6, то степеневою функцією , якщо як на рис.2.7, то параболою .



|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *y*  *x*  0      Рис.2.5 | Рис2.6 | Рис.2.7 |

При обраному вигляді функції треба так підібрати параметри , щоб найкращим чином визначала залежність, що вивчається.



Для цього застосовують метод найменших квадратів (МНК), який полягає в тому щоб функція

(1)



була найменшою. У правій частині стоїть сума квадратів похибок наближення експериментальних точок функцією . Обмежимось випадком . Тоді функція від . За необхідною умовою екстремуму



(2)



Таким чином, для знаходження параметрів треба розв’язати систему (2).



Прилад 2.7.1 Експериментально одержана таблиця значень шуканої

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|  | 4 | 3.9 | 4.2 | 5. | 4.8 |

функції при 5 значеннях її аргументу. Знайти  у вигляді .

Розв’язання. Для обчислень коефіцієнтів системи (2) складається таблиця,

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| I | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |

яка для даного прикладу є

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| I | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |  |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | =15 |
|  | 4. | 3.9 | 4.2 | 5. | 4.8 | =21.9 |
|  | 1 | 4 | 9 | 16 | 25 | =55 |
|  | 4 | 7.8 | 12.6 | 20 | 24 |  |

Система (2) буде така

10*a=*68.4-65.7=2.7, *a*=0.27,=3.57

Графік шуканої прямої  *y=*0.27*х+*3.57 наведено на рис. 2.8.

1

2

3

4

5

2

*y*

*x*

0

*y=*0.27*х+*3.57

1

3

4

5

Рис.2.8

Розділ 3. ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ

3.1.Задача лінійного програмування (ЗЛП)

3.1.1. Постановка задачі лінійного програмування

Математичне програмування це розділ математики, який вивчає теорію та чисельні методи розв’язання багатовимірних екстремальних задач з обмеженнями, тобто задач на екстремум функцій багатьох змінних з обмеженнями на область зміни цих змінних.

Функцію, екстремум якої треба знайти в умовах економічних можливостей, називають цільовою функцією, показником ефективності, або критерієм оптимальності. Економічні можливості формалізуються у вигляді системи обмежень, звичайно, рівностей або нерівностей

Загальна задача лінійного програмування полягає в знаходженні екстремуму лінійної цільової функції



(1)



при лінійних обмеженнях вигляду

(2)



та умовах невід’ємності

(3)



У деяких обмеженнях системи (2) можуть бути знаки або .



Існує велика кількість економіко-математичних моделей, до яких застосовується ЗЛП: задача про оптимальний розподіл ресурсів, задача про вибір оптимальних технологій, задача про суміші та т.і. Розглянемо одну з них.

3.1.2. Задача про оптимальний розподіл ресурсів

Нехай для виробництва видів продукції у кількості одиниць потрібно видів ресурсів , запаси яких (сировина, енергія, робоча сила, устаткування та т.і.). Позначимо ціну реалізації одиниці -ї продукції, – число одиниць -го ресурсу для виробництва одиниці -го продукту. Числа називаються технологічними коефіцієнтами, а матриця – технологічною матрицею.



Тоді добуток буде ціна реалізації одиниць продукції, а



()



загальний об’єм реалізації – цільова функція, яку потрібно максимізувати.

Оскільки витрата -го ресурсу для виробництва одиниць -го продукту, то просумувавши витрату -го ресурсу для виробництва усіх видів продукції, одержимо загальну витрату цього ресурсу, який не перевершує



( )



Таким чином, модель задачі, про найкращій розподіл ресурсів полягає в знаходженні () при умовах () та умовах невід’ємності ()



()



3.1.3. Геометрична інтерпретація та графічний розв’язок ЗЛП

Із аналітичної геометрії відомо, що сукупність точок -вимірного простору координати яких задовольняють системі обмежень (2),(3) утворюють в опуклий многогранник із скінченним числом вершин (кутових точок).



Означення 1. Область розв’язків системи обмежень (2)-(3) називається областю допустимих розв’язків або множиною допустимих планів ЗЛП.



Означення 2. Допустимий план, на якому цільова функція досягає екстремуму, називається оптимальним планом.

Основна теорема ЗЛП. Оптимальний план виявляється кутовою точкою множини допустимих розв’язків ЗЛП



Множина розв’язків системи нерівностей (обмежень) (2)-(3) при буде опуклий многокутник, скінченний або нескінченний.



Нехай в задачі (1)-(3) число невідомих . Розглянемо ЗЛП.



|  |
| --- |
| Рис 3.1  *O*  *B*          Розв’язок системи обмежень  (1.2)-(1.3) буде п’ятикутник ОАВСЕ  (рис.3.1). Необхідно серед точок |

цього п’ятикутника знайти таку точку, в якій лінійна функція 

максимальна.

Означення 3. Вектор називається градієнтом функції . Він показує напрям найбільшого зростання цільової функції



Означення 4. Лініями рівня (лініями постійного значення) цільової функції називається сім’я паралельних прямих де довільна стала, параметр.



Вектор перпендикулярний до прямих сім’ї .



З геометричної інтерпретації ЗЛП випливає порядок іі графічного розв’язання:

1.Будується область допустимих планів .



2.Будується вектор (рис.3.1).



3. Проводиться довільна лінія рівня, наприклад, .



4. Лінія рівня переміщається у напрямі поки вона не пройде через її останню спільну точку з областю (точка С на рис.3.1). Координати цієї точки визначають оптимальний план даної задачі. Якщо розв’язується задача на мінімум, то лінія рівня переміщається в напрямі , тобто в напрямі антиградієнта поки вона не пройде через її останню спільну точку з областю (точка О на рис.3.1)..5.



3.1.4. Розв’язання ЗЛП симплекс – методом

Будь-які *m* невідомих системи *m* рівнянь з *n* невідомими звуться основними (базисними), якщо визначник матриці коефіцієнтів при них відрізняється від 0. Тоді інші невідомих звуться вільними. Базисним (опорним) розв’язком зветься розв’язок системи, у якому всі вільних невідомих дорівнюють 0. Сумісна система має нескінчену кількість розв’язків, серед них базисних скінченна кількість, що не перебільшує . Базисний розв’язок зветься допустимим, якщо всі його компоненти невід’ємні. Допустимий базисний розв’язок зветься опорним планом ЗЛП.



Можна довести, що кожному опорному плану відповідає вершина многогранника допустимих розв’язків га навпаки, кожній вершині многогранника допустимих розв’язків відповідає опорний план.

Алгоритм симплекс-метода складається з наступних кроків:

1. Находять початковий опорний план.

2. Перевіряють його на оптимальність.

3. Якщо план не оптимальний, то переходять до іншого опорного плану, для якого значення цільової функції ближче до оптимуму.

4 Пункти 2,3 повторюють до тих пір, поки не буде знайдено оптимальний план.

Критерій оптимальності. Нехай розв’язується задача на максимум (мінімум). Якщо в рядку коефіцієнти при вільних невідомих невід’ємні (недодатні), то опорний план оптимальний.



Приклад 3.1.1. Розв’язати ЗЛП симплекс – методом



1. Приведення ЗЛП (1)-(3 до канонічного вигляду.

Для аналітичного розв’язку ЗЛП треба перетворити її обмеження нерівності (2) на рівності. Для цього до лівої частини кожного обмеження (2) додається ( а у випадку, коли знак нерівності віднімається) додаткова невід’ємна змінна. Тоді канонічний вигляд ЗЛП (1)-(3) буле такий



1. Початковий опорний план. Виразимо базисні змінні



через вільні . Для зручності вільні змінні беруть із знаком “–“. Системі (2.5) ставиться у відповідність таблиця, яка називається симплекс-таблицею.

Симплекс-таблиця це таблиця виразів базисних змінних та цільової функції через вільні:

1–й стовпчик – базисні змінні,

2-3-й стовпчик – коефіцієнти при вільних змінних“–“,“–“,



4–й стовпчик – вільні члени.

4–й рядок – коефіцієнти виразів цільової функції через вільні змінні –,–. Табл.1



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | В |
|  | -2 | 1 | 2 |
|  | 1 | -2 | 2 |
|  | 1 | 1 | 5 |
| *F* | -2 | -1 | 0 |

Початковий базисний розв’язок (0; 0; 2; 2; 5) допустимий, але не оптимальний, оскільки в рядку коефіцієнти від’ємні.



1. Перехід до кращого опорного плану.

1)Вибір розв’язуючого елемента. Стовпчик коефіцієнтів при вільній змінній, для якого в рядку стоїть найбільший за абсолютною величиною від’ємний елемент, називається розв’язуючим стовпчиком. Складаємо не від’ємні відношення елементів стовпчика В до відповідних елементів розв’язуючого стовпчика та обираємо серед них найменше . Рядок, для якого це відношення найменше називається розв’язуючим рядком (тут рядок ), елемент, який стоїть на перетині розв’язуючого стовпчика та розв’язуючого рядка називається розв’язуючим елементом. Розв’язуючий елемент визначає змінну, яка виводиться з базису та вводиться в базис . Операція виведення однієї змінної з базису та вводу в базис іншої називається жордановим перетворенням



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | В |
|  |  | 1 | 2 |
|  |  |  |  |
|  | 1 | 1 | 5 |
| *F* | -2 | -1 | 0 |

та виконується за наступним правилом.

1. Розв’язуючий елемент замінюється на 1, а потім усі елементи розв’язуючого рядка діляться на розв’язуючий елемент.

2. Елементи розв’язуючого стовпчика змінюють знак на протилежний, а потім діляться на розв’язуючий елемент.

3. Усі інші елементи обчислюються за правилом обчислення визначника 2-го порядку (обчислення починається з розв’язуючого елемента), а потім діляться на розв’язуючий елемент.

Результат цих перетворень заносяться в симплекс-таблицю 2. Змінні та міняються місцями.



Табл.2 Одержано базисний розв’язок (2; 0; 6; 0; 3) який є

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | В |
|  | 2 | -3 | 6 |
|  | 1 | -2 | 2 |
|  | -1 | 3 | 3 |
| *F* | 2 | -5 | 4 |

опорним планом, але не оптимальний, оскільки в рядку є від’ємний коефіцієнт (-5).



4.Перехід до наступного опорного плану.

Розв’язуючий елемент 3. Змінні виводиться з базису, а вводиться в базис. Виконується жорданове перетворення та одержимо симплекс таблицю 3. Опорний план (4; 1; 9; 0; 0) оптимальний,оскільки в рядкуусі елементи додатні =24+1=9 є на перетині рядка і стовпця В.



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | В |
|  | 1 | 1 | 9 |
|  |  |  | 4 |
|  | - |  | 1 |
| *F* |  |  | 9 |

Приклад 3.1.2. Розв’язати задачу лінійного програмування



а) геометричним методом;

б) симплекс-методом.

Розв’язання 1 а) Знайдемо дві точки на прямій , ( 0; 4), (6; 0).



Точка С перетину прямих , *С*(2;)



4



Будуємо графіки прямих та .



Область допустимих розв’язків *D*– це



заштрихований трикутник.

. Будуємо лінію рівня



по двом точкам ( 0; 0), (3; 1).



Графічний розв’язок буде точка *С*(2;) Рис.3.2



1 б). Розв’язання симплекс методом.

Зводимо ЗЛП до канонічного вигляду.



Базисний розв’язок ( 0; 0; 12; -2) не є допустимим.

За останньою системою складаємо першу симплекс-таблицю та обчислюємо 2-й базисний розв’язок

табл.1 табл.2 табл.3

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | 1 |  |  |  |  | 1 |  |  |  |  | 8 |
|  | 2 | 3 | 12 |  |  | 2 | 3 | 8 |  |  |  |  |  |
|  | -1 | 0 | -2 |  |  | -1 | 0 | 2 |  |  | -1 | 0 | 2 |
| *F* | 1 | -3 | 0 |  | *F* | 1 | -3 | -2 |  | *F* | 3 | 1 | 6 |

З табл. 2 одержимо 2-й базисний розв’язок ( 2; 0; 8; 0) , який є допустимим, але не оптимальним, оскільки в рядку ***F*** є від**’**ємний елемент -3. Обчислюємо 3-й базисний розв’язок (2; ; 0; 0), який є опорним та оптимальним планом, оскільки умова оптимальності виконана.



# 3.2.Задача цілочисельного програмування.

Цлочисельне програмування (ЦП) це розділ математичного програмування, в якому на шукане рішення накладається умова цілочисельності, а область допустимих рішень кінцева. До ЦП відносяться, наприклад, задачі, в яких змінні означають кількість тепловозів при розподілу за напрямками, кількість турбін у енергосистемі та т.і. Для розв’язання задачі ЦП застосовують метод відсікання та алгоритм Гоморі.

Метод відсікання. Алгоритм Гоморі*.*

Алгоритм Гоморі складається з наступних кроків:

1. Розв’язуємо симплекс-методом ЗЛП без умови цілочисельності.
2. Якщо оптимальний розв’язок є цілочисельним, то знайдений розв’язок збігається з оптимальним розв’язком задачі цілочисельного програмування.
3. Якщо серед компонент оптимального плану є хоча б одна нецілочисельна, то будується додатне обмеження, яке називається правильним відсіканням та має наступні властивості:
   1. лінійність;
   2. відсікає знайдений оптимальний нецілочисельний план;
   3. не відсікає жодного цілочисельного плану.

Процес побудови додаткових обмежень продовжується доти, доки не буде отримано цілочисельний план або виявиться відсутність цілочисельного розв’язку задачі.

**Побудова правильного відсікання.** У симплекс- таблиці оптимального плану задачі (1)-(3) обирається рядок з нецілим вільним членом. Якщо таких рядків декілька, то обирається рядок з найбільшою дробовою частиною. Правильне відсікання має вигляд

,



де входить до вільних змінних, , - дробові частини вільного члена та коефіцієнтів при невідомих виділеного рядка



Дрбова частина визначається за наступним правилом. Число записується як сума найближчого меншого цілого числа та додатного дробу, а потім ціле відкидається. Наприклад, **, , .**



Приклад 3.2.1. Розв’язати задачу з прикладу 3.1.2 з додатковою умовою цілочисельності методом Гоморі.



Розв’язання. Симплекс- таблиця 3 з прикладу 3.1.2. є така

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | 8 |
|  |  |  |  |
|  | -1 | 0 | 2 |
| *F* | 3 | 1 | 6 |

Розв’язок ЗЛП (2; ; 0; 0), знайдений, але він нецілочисельний. Будуємо додаткове відсікання за першим рядком табл.3



,



Дробові частини , ,



,



,



.



Заносимо додаткове обмеження в таблицю та розв’язуємо симплекс-методом.

табл.4 табл.5

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | 1 |  |  |  |  | 1 |
|  |  |  |  |  |  | 0 |  | 2 |
|  | -1 | 0 | 2 |  |  | -1 | 0 | 2 |
|  | -2 | -1 | -2 |  |  | 2 | -1 | 2 |
| *F* | 3 | 1 | 6 |  | *F* | 1 | 1 | 4 |

Оптимальний план цілочисельної ЗЛП (2; 2; 2; 0; 0),



3.3.Двоїста задача ЛП

3.3.1 Економічна інтерпретація двоїстої задачі

В п.1.2 подана задача про оптимальний розподіл ресурсів Сформулюємо задачу, яка є двоїстою до неї. Використовуємо позначення підрозд.3.1.2.

Припустимо, що деяка організація вирішила закупити ресурси підприємства та необхідно встановити оптимальні ціни на ці ресурси. Зрозуміло, що організація, яка купує, зацікавлена в тому щоб витрати на всі ресурси по цінам відповідно були мінімальні, тобто



(4) З іншого боку сторона, яка продає згодна на ціну, при якій прибуток одержаний від продажу ресурсів, був би не менш тієї суми, яку підприємство може одержати при переробці ресурсів в готову продукцію. На виготовлення одиниці продукції витрачається одиниць ресурсу , одиниць ресурсу одиниць ресурсу за ціною, відповідно, . Тому продавець зацікавлений в тому щоб витрати на ресурси, які потрібні при виготовленні одиниці продукції були не менш її ціни , тобто



(5)



за умови невід’ємності цін

(6)



Вирази (4)-(6) визначають економіко-математичну модель двоїстої задачі ЛП. Ціни ресурсів не задаються як до початку виробництва, а визначаються з розв’язку задачі. Тому їх називають оцінками ресурсів (двоїстими оцінками, об’єктивно обумовленими оцінками по Л.В.Канторовичу)



3.3.2. Взаємно двоїсті задачі та їх властивості

Теорія двоїстості застосовується для проведення якісного дослідження ЗЛП (поліпшення оптимального плану продукції, що випускається).

Нехай початкова задача Двоїста задача ЛП

(1) (4)



при обмеженнях вигляду при обмеженнях вигляду

(2) (5)



та умовах невід’ємності та умовах невід’ємності



Порівнюючи моделі (1),(2) і (4),(5) пари двоїстих задач, можна визначити такий зв’язок між ними.

1. Коли пряма задача - на мінімум, тоді двоїста задача на максимум , і навпаки.

2. Коефіцієнти цільової функції прямої задачі виявляються вільними членами системи обмежень двоїстої задачі.



3. Вільні члени системи обмежень прямої задачі виявляються коефіцієнтами цільової функції двоїстої задачі..



4. Матриці систем обмежень прямої та двоїстої задач взаємно транспоновані

5. В прямій задачі на максимум обмеження-нерівності записують у вигляді , в двоїстій на мінімум – .



6.Усі змінні в обох задачах невід’ємні.

Приклад 3.3.2.1. Скласти двоїсту задачу до задачі з прикладу 3.1.1.

Розв’язання.

Пряма задача Двоїста задача



Зауваження. Співвідношення двоїстості взаємне, тобто задача двоїста до двоїстої збігається з прямою.

Приклад 3.3.2.2. Скласти двоїсту задачу до двоїстої (\*\*) з прикладу3.3.2.1

Розв’язання. Запишемо (\*\*) у вигляді.



та ще раз використаємо правило переходу до двоїстої задачі. Одержимо задачу





Розв’язок задачі співпадає з розв’язком оскільки для будь-якої функції точки максимуму співпадають з точками мінімуму функції



Приклад 3.3.2.3. Розв’язати двоїсту задачу симплекс – методом.



Обмеження – нерівності в перетворюємо до вигляду



а далі додаємо до лівих частин нерівностей додаткові невід’ємні змінні та виразимо базисні змінні через вільні виводимо



Початковий базисний розв’язок (0; 0; 0; -2; -1) не є допустимим,

Складаємо симплекс-таблицю Звичайно, вільні змінні, як і в прикладі 3.1 беремо зі знаком “–”. Табл. 1

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  | 1 |
|  | 2 | -1 | -1 | -2 |
|  | -1 | 2 | -1 | -1 |
| *Z* | -2 | -2 | -5 | 0 |

В табл..1 виділено розв’язуючий елемент. Змінну виводимо з базису, а змінну вводимо до базису шляхом жорданова перетворення та приходимо до симплекс таблиці 2.



Табл. 2

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  | 1 |
|  | 2 | -1 | -1 | 2 |
|  | 3 | 2 | -3 | -5 |
| *Z* | -6 | -2 | -3 | 4 |

Базисний розв’язок (0; 2; 0; 0; -5) не є допустимим, оскільки містить від’ємний елемент. В таблиці 2 розв’язуючий елемент -3. Виконується жорданове перетворення та одержимо симплекс-таблицю 3.

Табл. 3

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  | 1 |
|  | - | - |  |  |
|  | -1 | - | - |  |
| *Z* | -9 | -4 | -1 | 9 |

Базисний розв’язок (0; ; ; 0; 0) допустимим та оптимальний У двоїстої задачі



Можна порівняти останню симплекс-таблицю двоїстої задачі з останньою симплекс-таблицю прямої задачі.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | В |
|  | 1 | 1 | 9 |
|  |  |  | 4 |
|  | - |  | 1 |
| *F* |  |  | 9 |

. Такий збіг розв’язків не є випадковим, він ілюструє теорему двоїстості.



Теорема 3.3.1. Якщо одна з пари двоїстих задач має оптимальний розв’язок, то його має й інша, при цьому оптимальні значення цільових функцій збігаються.=



Зауваження. Між змінними двоїстих задач можна визначити відповідність так, що додаткові змінні однієї задачі відповідають основним змінним іншої , і навпаки



Так, у прикладі 6 відповідність є такою



Тобто, відповідні змінні рівні або мають рівні абсолютні величини

# 3.4.Транспортна задача

3.4.1.Таблична модель транспортної задачі

Нехай на станціях є однорідний вантаж для споживачів .



Відомі: запаси кожного постачальника ;



потреби кожного споживача ;



тарифи (вартості) перевезення одиниці вантажу від до



Числа – означають кількість одиниць вантажу, який треба перевезти від постачальника до споживача та утворюють матрицю перевезень , . Тарифи визначаються матрицею того ж розміру, що і *Х*.



Для наочності умови ТЗ подають таблицею, яку називають матричною або табличною моделлю ТЗ.

Постачальники Споживачі Таблиця 1.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | … |  | Запаси |
|  |  |  | … |  |  |
|  |  |  | … |  |  |
| … | … | … | … | … | … |
|  |  |  | … |  |  |
| Потреби |  |  |  |  |  |

Задача полягає в тому, щоб скласти такий план перевезень, який задовольняє обмеженням по запасам, потребам та невід’ємності та такий, щоб його загальна вартість була мінімальною. В математичній формі ці умови

(1)



(2)



Транспортна задача є частинним випадком ЗЛП. План перевезень, який задовольняє обмеженням (2) називається допустимим (опорним). Допустимий план перевезень, при якому цільова функція досягає мінімуму називається оптимальним. Так само, як і в симплекс-методі, складається початковий опорний план, який надалі поліпшується. Розглянемо два методи складання початкового опорного плану. Обмежимось випадком, закритої транспортної задачі, коли загальний запас вантажу усіх постачальників дорівнює загальній сумі потреб усіх споживачів, тобто



3.4.2. складання початкового опорного плану

Метод північно-західного кута

Вантаж розподіляється починаючи з лівої верхньої клітинки, рухаючись від неї по рядку вправо та по стовпчику вниз. Тобто, спочатку розподіляється вантаж 1-го постачальника, далі 2-го, …, **-**го.



Метод мінімального елемента (мінімальної вартості)

складання початкового опорного плану полягає в тому, що на кожному кроці заповнюється клітинка таблиці з мінімальним тарифом та заповнюється по максимуму.

Отже, на 1-му кроці заповнюється клітинка з найменшим тарифом. Далі виключають з розгляду заповнені рядки та стовпчики, а з клітинок, що залишились, знову обирають клітинку з найменшим тарифом та т. ін.

Кількість заповнених клітинок повинно дорівнювати **.** Якщо ця умова не виконується – випадок **виродженого** опорного плану, то в необхідну кількість вільних клітинок з мінімальним тарифом вписують нулі та вважають їх заповненими.



3.4.3. Метод потенціалів розв’язання ТЗ

Для кожного постачальника та для кожного споживача складається система потенціалів та , тобто чисел, які задовольняють системі рівнянь, складених для заповнених клітинок



(3)



Оскільки система (3) має рівнянь з невідомими, то одному з потенціалів надають звичайно значення нуль.



Ознака оптимальності опорного плану. Якщо для усіх вільних клітинок виконується умова

, (4)



то опорний план оптимальний.

Алгоритм поліпшення опорного плану

1.Якщо ознака (4) не виконується, то серед вільних клітинок, для яких обирають клітинку з найбільшим - “кандидата ” на заповнення.



2. Обравши клітинку для заповнення, складається цикл перерахунку – замкнута ламана (тобто починається та закінчується в цій клітинці ) з вершинами в заповнених клітинках та ланками паралельними рядкам та стовпчикам таблиці. Такий цикл існує для кожної вільної клітинки. Число клітинок у циклі завжди парне.



3.Вершини циклу розмічаються знаками “+”, “–”, які чергуються (“+”– привезти вантаж, “–” вивезти вантаж), починаючи з клітинки “кандидата ” на заповнення, в якій ставиться знак “+”.

4. Обравши мінімальний із вантажів у клітинках із знаком “–”, переміщують його по циклу (вантаж у клітинках із знаком “+” збільшується на цю величину, а в клітинках із знаком “–” зменшується.

5.Для нового плану перевезень:

1) складається нова таблиця;

2) визначається система потенціалів;

3) план перевіряється на оптимальність.

Якщо план оптимальний, то задача розв’язана, якщо ні, то повторюються кроки 1)–5), доки не буде одержано оптимальний план.

**3.4.4.Приклад розв’язання ТЗ**

На *m* станціях зосереджено  одиниць однорідного продукту. Цей продукт треба перевезти до *n* споживачів, причому потреба кожного

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | 16 | 14 | 10 |
| 17 | 2 | 1 | 3 |
| 11 | 4 | 2 | 4 |
| 5 | 1 | 3 | 5 |
| 7 | 4 | 7 | 1 |

споживача складає, відповідно, одиниць продукту. Вартість перевезення (тариф) одиниці продукту від постачальника до споживача дорівнює (вказані в таблиці).



1. Знайти опорний план методом найменшоï вартості. Обчислити значення цільовоï функціï для цього плану.
2. Знайти опорний план методом північно-західного кута, обчислити значення функціï *F* для цього плану. Порівняти це значення зі значенням *F*  із п.1).
3. Знайти оптимальний розв’язок задачі, виходячи з опорного плану, знайденого за методом найменшоï вартості.

Споживачі табл. 1

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *Постачальники* |  |  |  |
|  | 2 | 1 | 3 |
|  | 4 | 2 | 4 |
|  | 1 | 3 | 5 |
|  | 4 | 7 | 1 |

**Розв’язання. 1. Заповнення таблиці методом мінімальної вартості**.

Споживачі табл. 2

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *Постач-ники* |  |  |  |
|  | 2 | 1 | 3 |
|  | 4 | 2 | 4 |
|  | 1 | 3 | 5 |
|  | 4 | 7 | 1 |

Заповнюємо клітинки (1,2), (3,1), (4,3) найменшої вартості 1 числами відповідно 14, 5, 7. Закреслюємо вільні клітинки 2-го стовпця та 3-го та 4-го рядка,оскільки 2-й споживач отримав потрібну кількість піску, а 3-й та 4-й постачальник використали свої ресурси. В клітинку (1,1) вартості 2 робимо поставку 3 та викреслюємо вільну клітинку (1,3), оскільки 1-й постачальник використав свої ресурси. У клітинки (2,1) та (2,3), що залишились вільними, вписуємо, відповідно, 8 та 3, щоб задовольнити 1-го та 3-го споживача. Опорний план побудовано (табл.2) Цільова функція для цього плану =6+14+32+12+5+7=76.



**2. Знаходження опорного розв’язку методом північно-західного кута.**

Усі ресурси 1-го постачальника ставимо у клітинки (1,1) 16 та (1,2) 1. Викреслюємо вільні клітинки 1-го стовпчика та 1-го рядка. Усі ресурси 2-го постачальника ставимо у клітинку (2,2) та клітинку (2,3) викреслюємо. Усі ресурси 3-го – у клітинки (3,2) ставимо 2 та 3 у (3,3) . Викреслюємо вільні клітинки 2-го стовпчика. Усі ресурси 4-го постачальника 7 задовольняють 3-го споживача. Опорний план побудовано (табл.3) Цільова функція для цього плану (табл.3) 32+1+22+6+15+7=83. Значення цільової функції для плану побудованого методом мінімальної вартості менше на 7 гр. од, ніж для плану побудованого методом північно-західного кута.



Споживачі табл. 3

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *Постачальники* |  |  |  |
|  | 2 | 1 | 3 |
|  | 4 | 2 | 4 |
|  | 1 | 3 | 5 |
|  | 4 | 7 | 1 |

**4.Розв’язання транспортної задачі методом потенціалів.**

Складаємо систему рівнянь для  та  - потенціалів для заповнених клітинок . Беремо , Розв’язуємо рівняння для потенціалів та перевіряємо умови оптимальності :  для усіх вільних клітинок. Споживачі табл..4

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *Постачальники* |  |  |  |  |
|  |  | +  2 | - 1 | 3 |
|  |  | - 4 | + 2 | 4 |
|  |  | 1 | 3 | 5 |
|  |  | 4 | 7 | 1 |
|  |  |  |  |  |





Для клітинки (2,2) умова оптимальності не виконана. . Складаємо цикл перерахунку (у табл..4) Обчислюємо . В клітинки із знаком “+” додаємо число , а з клітинок із знаком “–“ віднімаємо.



Складаємо нову таблицю, нову систему рівнянь для потенціалів, обчислюємо потенціали та перевіряємо опорний план на оптимальність.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *Постач-ки* |  |  |  |  |
|  |  | 2 | 1 | 3 |
|  |  | 4 | 2 | 4 |
|  |  | 1 | 3 | 5 |
|  |  | 4 | 7 | 1 |
|  |  |  |  |  |





Усі . Умови оптимальності виконані. План оптимальний. Обчислимо вартість перевезень



=112+61+82+34+51+71=68.



**3.5. Динамічне програмування**

**Динамічне програмування (ДП)** (інакше **динамічне планування** – метод знаходження оптимальних розв’язків в задачах з багатокроковою (багатоетапною) структурою.

Багато процесів, зокрема в економіці розкладаються на окремі кроки природним чином . Це усі процеси планування та управління. де кроки (етапи) – рік, квартал, місяць та т.і. Метод ДП застосовується також до задач, де час явно не фігурує; розподіл на кроки в цих задачах проводиться штучно. Динаміка задач ДП – в методі розв’язання.

**3.5.1. Задача оптимального розподілу ресурсів**

Нехай деякий ресурс (гроши), початкова кількість якого відома слід розподілити між двома підприємствами і впродовж років.



Схема розподілу ресурсів є такою

1.Початкова кількість ресурса **,** яка називається початковим станом системи, розкладається на два невід'ємних доданки та **–** вклади ресурсів в і впродовж 1-го року. Величина називається керуванням. В процесі виробництва деяка частина ресурсів амортизується (втрачається) та к початку наступного року у підприємств залишається лише кількість ресурсу **,** де **.**



2.Кількість потрібно знову розкласти на два невід'ємних доданки та **–** вклади ресурсів в і впродовж 2-го року. Наприкінці 2-го року (на початку 3-го) у підприємств залишається лише кількість ресурсу **, .**



**3.** Вклади ресурсів в і впродовж 3-го року є та. Наприкінці 3-го року (на початку 4-го) у підприємств залишається лише кількість ресурсу **.** та т.ін..



В підсумку одержана послідовність керувань () та відповідна послідовність станів .



Припускається, що прибуток, одержаний і  впродовж **-** го року , де деякі відомі числа, тобто обмежимось найпростішим випадком, коли прибуток є лінійною функцією.



Задача полягає у виборі такої послідовності керувань (), яка максимізувала б функцію змінних



**3.5.2. Розв’язання задачі розподілу ресурсів методом ДП**

Нехай роки, гр. од., **,** та загальна кількість коштів, які вкладаються на **-** му етапі (**-** му році) або залишилось на прикінці **-** 1 року е



 **(1)**

Формула (1) називається **рекурентною (**лат. recurrens, такий, що повертається). За означенням, формула називається **рекурентною** якщо вона дозволяє обчислити усі члени послідовності, якщо відомі її перші члени. Нехай функція  Тоді прибуток, який одержують підприємства на **-** му етапі є

**,**

а з урахуванням рівності



 **(2)**

Кількість коштів (1), які вкладаються на **-** му етапі перепишемо у вигляді

**(3)**



**Принцип оптимальності Р. Беллмана**

Р.Беллман – американський математик, (1920-1984рр) розробив принцип оптимальності (ПО) у1950-1953рр разом зі своїми учнями.  **Принцип оптимальності.** Яким би не був стан системи перед черговим етапом потрібно обрати керування на цьому етапі так, щоб прибуток на цьому етапі плюс максимальний прибуток на усіх наступних етапах був максимальним

Позначимо максимальний прибуток, одержаний на останніх етапах, починаючи з **-** го, тобто з розподілу ресурсів. Тоді аналітичний вираз ПО є таким:



На кожному етапі планування формується функція мети *Fk* (*xk*), що виражає вимогу максимуму доходу на попередніх *k* періодах з врахуванням вигідного розміру залишку, який буде розподілений на майбутньому етапі планування (вектор*X*=(*x1,x2,…xk*)– вектор фінансового стану підприємств на початок k-того періоду). Вибір алгоритму зворотної прогонки обумовлений відсутністю вимоги до розміру залишку за межею останнього періоду планування.

Загальний вигляд системи рекурентних співвідношень Беллмана має вигляд

, (4)



або в розгорнутому вигляді

(5)



Рівняння (5) називаються **функціональними рівняннями Беллмана.** Запишемо ці рівняння для приклада, що розглядається, та в порядку від 1-го до останнього.

(6)



=0, оскільки за умовою на 5-й рік нічого не планується. У загальному



випадку завжди розв'язок задачі ДП починається з останнього етапу.

,



отже.



- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -



отже,



- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -



отже,



- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -



отже,



За означенням функції функція є максимальний прибуток підприємств за 4 роки:



гр.од.=гр.од. (7)



Для одержання такого прибутку знайдена стратегія керування потребує усі ресурси в перші два роки надати підприємству , а на третій і четвертий роки – у підприємство .



Обчислимо максимальний прибуток підприємств та стани системи наприкінці кожного року при одержаній стратегії планування.

**1-й рік:** гр.од.,



гр.од.



**2-й рік:**



= гр.од гр.од.



**3-й рік:**



= гр.од. гр.од.



**4-й рік:**



гр.од. гр.од.



гр.од.– це залишок коштів після 4-х років господарювання. Сумарний прибуток підприємств за 4 роки:



гр.од.



звичайно збігається з одержаним за формулою (7)

**3.6. Теорія ігор**

**3.6.1.Предмет теорії ігор. Антогоністичні матричні ігри**

Теорія ігор вивчає математичну модель реальної конфліктної ситуації. ЇЇ метою є розробка рекомендацій з розумної поведінки учасників конфлікту. Сторони конфлікту називаються **гравцями** Приклади конфліктних ситуацій:1) будь-яка ситуація, яка складається в ході бойових дій; 2). Конкурентна боротьба в економіці (між фірмами та країнами); 3) боротьба сторін у суді та спорті.

Теорія ігор припускає, що обидва учасники конфлікту **в однаковому степені розумні.** Під **стратегією** гравця розуміється один із способів ведення гри цім гравцем.

Деякі ігри (рулетка, азартні0 складаються лише з випадкових ходів, ними теорія ігор не займається. Її мета – оптимізація поведінки гравців у грі, де поряд з випадковими є особисті ходи в грі. Такі ігри називаються стратегічними. Гра називається **кінцевою,** якщо в кожного гравця є лише кінцева кількість стратегій, у протилежному випадку – **нескінченною.**

Розглянемо випадок кінцевого вибору стратегій кожного з гравців. Нехай у гравця є стратегій , а у гравця – стратегій . Така гра називається грою **.**



Нехай гравець обрав стратегію , а гравець – стратегію . Відповідний такому вибору стратегій виграш гравця позначимо (виграш при цьому дорівнює ). Нехай для кожної пари стратегій виграш відомий. Тоді складається матриця , яка називається **матрицею виграшем**



*В1 В2 ... В4*

..



Одержано **антагоністичну матричну гру з нульовою сумою** (кожний гравець виграє лише за рахунок інших). При вивченні конфлікту завжди припускається, що кожному гравцю невідома стратегія, яку обере супротивник, але обом гравцям відома матриця виграшів.

**Оптимальною** стратегією гравця називається така його стратегія, яка забезпечує йому найбільші шанси на виграш за умовою, що супротивник протидіє найбільш розумним способом.

Нехай гравець обрав стратегію . Тоді його гарантований (найбільш можливий) виграш: , тобто мінімум з елементів го рядка. Знайдемо гарантований виграш для усіх стратегій гравця . Тоді гравцю потрібно обрати стратегію (рядок), яка відповідає найбільшому гарантованому виграшу (**максимінну стратегію**). Число



(**максимін** матриці виграшем) називається **нижньою чистою ціною гри.**

Сторона міркує аналогічно. Вона знаходить свій максимальний програш для кожної із стратегій гравця **.** Потім обирає стратегію, яка дає найменше значення серед максимальних програшів (**мінімаксну стратегію**). Число



**мінімакс** матриці виграшем називається **верхньою чистою ціною гри.**

**Теорема 3.6.1.**. Нижня чиста ціна гри завжди не перевершує верхню чисту ціну гри, тобто

.



Якщо , то число називають **чистою ціною гри**. Пару чистих стратегій, для яких називають **сідловою** точкою матриці гри, а елемент **сідловим** елементом матричної гри. Відхилення гравця ****від максимінної стратегії веде до зменшення його виграшу. а відхилення гравця *В* від мінімаксної стратегії веде до збільшення його програшу. Іншими словами, якщо в матричній грі є сідловий елемент. то найкращими для гравців є їх максимінна та мінімаксна стратегії. Ці чисті стратегії, які утворюють сідлову точку є оптимальні чисті стратегії, відповідно, гравців *А* та *В*.



**Приклад 3.6.1**. Знайти нижню та верхню чисті ціни гри, встановити наявність сідлової точки ігор, заданих платіжними матрицями

а) *В1 В2 В4*



б) ) *В1 В2 В4*



в) ) *В1 В2 В4*



1. **Випадок . Мішані стратегії**



Для мінімаксних стратегій при виграш для кожного з гравців **,** апрограш **.** У кожного з гравців виникає проблемазбільшення виграшу, зменшення програшу. Для цього застосовують **мішані стратегії**.



**Означення 1**. Нехайймовірності застосування гравцем стратегій , . Тоді кажуть, що гравець застосовує мішану стратегію



.



Якщо усі крім однієї, то мішана стратегія перетворюється на звичайну чисту стратегію, наприклад



.



Аналогічно. мішаною стратегією гравця називається вектор



**,**



**Означення 2** Функція мішаних стратегій



Називається **платіжною функцією** гри з матрицею .



**Означення 3.** Стратегії , називаються **оптимальними**, якщо для довільних стратегій . виконується умова



.



З останньої нерівності випливає, що точка є сідловою точкою функції .



**Означення 4**..Значення платіжної функції при оптимальних стратегіях визначає ціну гри



,



а сукупність оптимальних стратегій та ціни гри визначає **розв’язок гри**.

У 1928 р булла доведена теорема Фон Неймана, яка стала наріжним каменем теорїї игор.

**Теорема 3.6.2.** **Фон Нейман).** Будь-яка кінцева матрична гра має розв’язок у мішаних стратегіях.

Ця теорема є теоремою існування. Конструктивний алгоритм відшукання мішаних стратегій був знайдений значно пізніше та подається наступною леоремою

**Теорема 3.6.3.**  Оптимальні мішані стратегії матричної гри з матрицею та виграшем знаходяться з розв’язку систем рівнян**ь**



**3.6.2. Спрощення платіжної матриці. Розв’язання гри**

Розглянемо властивості платіжної матриці, які дозволяють спростити розв’язок матричної гри.

**Означення 1**. Розглядаючи стратегії гравця порівняємо елементи рядка та рядка



Якщо для усіх виконується то виграш при стратегії буде більшим ніж лри стратегії . Стратегія називається **домінуючею** , а стратегія **домінуємою.**



Оскільки гравець зацікавлений в мінімізації програшу **домінуючим** будестовпчик з найменшими елементами, а відповідна стратегія **домінуючею.**



У матричній грі домінуємі та дублюючи рядки, (стовпці ) можна відкинути, що не впливає на розв’язок гри.

**Приклад 3.6.2.** Спростити платіжну матрицю

.



**Роз’язання.** 2-й рядок домінує над 1-м та 3-м. Відкидаємо домінуємі 1-й та 3-й рядки. . 3-й стовпчик домінує над 1-м, а 4-й над 2-м. Відкидаємо домінуємі 1-й та 2-й стовпці та одержимо спрощену платіжну матрицю.



Повертаємюсь до теореми 3.6.3.

**Приклад 3.6.3.** Дана платіжна матриця.



1.Спростити платіжну матрицю

2.Знайти ціну гри та оптимальні мішані стратегії.

**Роз’язання. 1.** 3-й рядок домінує над двома першими. 2-й стовпчик домінує над над першим, в 3-й над 4-м . Відкидаємо домінуєиі рядки та стовпці. Спрошена платіжна матриця .



**2.**Роз**’**язуємо систему (2). **.**



**3**.Роз**’**язуємо систему (1).ЇЇ матрична форма

де матриця, транспонована для



**Відповідь**. Оптимальні мішані стратегії з урахуванням викреслиних рядків та стовпчиків для 1-го та 2-го гравця відповідно **є:**



**3.7. Прийняття рішень в умовах невизначеності**

Різниця між задачами прийняття рішень та теорії ігор полягає в тому, що приймає рішення одна дійова особа, а в теорії ігор розглядаються ситуації, в яких два розумних суперечника мають конфліктуючі цілі.

У теорії прийняття рішень використовуються процедури вибору найліпшої з кількох можливих альтернатив. Якість обраного рішення залежить від якості даних, що описують ситуацію, в якій приймається рішення. В умовах невизначеності цим даним не можна приписати вагові коефіцієнти, які би надавали уявлення про ступінь їх важливості в процесі прийняття рішень. Альтернативним же діям в умовах невизначеності відповідають платежі, що залежать від випадкових **станів природи. Матрицю платежів**у задачі прийняття рішень з *m* можливими діями та *n* станами природи можна уявити таким чином.

*s1 s2 … sn*

.



Елементвиражає -е можливе рішення, а елемент - - ий стан природи. Платня (чи прибуток), що пов'язана з рішенням та станом дорівнює .



Необхідність альтернативного вибору обумовила розвиток певних критеріїв для аналізу ситуації , що пов'язана з прийняттям рішення. Ці критерії різняться за ступенем консерватизму, що проявляє індивідуум перед лицем невизначеності.

**1.Критерій Лапласа** опирається на **принцип недостатньої основи,** сенс якого в тому, що оскільки розподіл ймовірностей станів *Р(sі)* невідомий, то немає причин вважати їх неоднаковими. Тобто використовується **оптимістичне** припущення, що ймовірності всіх станів природи однакові між собою, *Р(s1)=Р(s2)* =*…=Р(sn)=1/n*. Якщо при цьому становить прибуток (витрати), то найліпшим рішенням є те, яке забезпечує



. (1)



**2.Максимінний (мінімаксний) критерій** базується на консервативній, обережній поведінці особи, що приймає рішення і зводиться до вибору найліпшої альтернативи з найгірших. Якщо - прибуток (витрати), то відповідно максимінному (мінімаксному) критерію обирається рішення, що забезпечує



. (2)



3.**Критерій Севіджа** намагається пом'якшити консерватизм мінімаксного (максимінного) критерію шляхом заміни матриці платежів *матрицею збитку* , яка визначається таким чином:



, якщо - прибуток,



, якщо - втрати. 3)



**4.Критерій Гурвіца** охоплює ряд різноманітних підходів до прийняття рішень – від найбільш оптимістичного до найбільш песимістичного. Нехай , тоді рішенню, обраному за критерієм Гурвіца відповідає



, якщо - прибуток,



, якщо - втрати. (4)



Параметр - **показник оптимізму.** Якщо =0, критерій Гурвіца стає консервативним, тому що його використання еквівалентно використанню звичайного максимінного (мінімаксного) критерію. Якщо =1, критерій Гурвіца стає надто оптимістичним, тому що розраховує на найліпші з найліпших умов. Для конкретизації ступеня оптимізму (чи песимізму) відповідним чином обирається величина з інтервалу [0,1]. В багатьох випадках вибір = 0,5 є найбільш розумним.



**Приклад 3.7.1**. Вибрати оптимальні стратегії для заданої матриці прибутку (втрат).

**Розв'язання**

Застосуємо описані критерії для вибору оптимальних рішень у випадку, коли - матриця прибутку (матриця втрат).



.



**1.Критерій Лапласа**

|  |  |
| --- | --- |
| Альтернатива |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

- переважна альтернатива



( - переважна альтернатива).



2.**Максимінний (мінімаксний)** критерій

- переважна альтернатива



( - переважна альтернатива).



**3.Критерій Севіджа**

-



переважна альтернатива

(- переважна



альтернатива).

**4.Критерій Гурвіца**

Оберемо = 0,5. Тоді



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Альтернатива | Мінімум  рядків | Максимум  рядків | 0,5(максимум рядка)+  (1-0,5)(мінімум рядка)  ((0,5)(мінімум рядка)+  (1-0,5)(максимум рядка)) |
|  | 1 | 1 |  |
|  | 2 | 5 |  |
|  | 3 | 5 |  |
|  | 2 | 5 |  |

- переважна альтернатива



( - переважна альтернатива).



Таким чином, аналізуючи результати застосування різних критеріїв, можна відмітити явну перевагу альтернативи ,якщо метою прийняття рішення є отримання найбільшого прибутку, і альтернативи , коли мова йде про зменшення втрат.



**3.8. Марковські процеси прийняття рішень**

Розглянемо процес прийняття рішень для випадку так званої “доброякісної” **або стохастичної невизначеності**, коли невизначені фактори, що входять до задачі, становлять випадкові величини, ймовірнісні характеристики яких або відомі, або можуть бути отримані дослідним шляхом. Процес прийняття рішень можна уявити як кінцеву кількість станів. Перехідні ймовірності між станами описують **марковський ланцюг.** Структура винагород у подібному процесі зображується в вигляді матриці, елементами якої є величини прибутку (або витрати), що виникають при переході з одного стану в другий. Матриця перехідних ймовірностей та матриця прибутків залежать від альтернатив рішення, які має особа, що приймає рішення. Метою задачі являється знаходження оптимальної стратегії, що максимізує прибуток, що очікується, в процесі, який має кінцеву кількість етапів.

Розглянемо елементи теорії марковських ланцюгів як інструмента задач прийняття рішень.

**3.8.1 Ланцюги Маркова з дискретним часом**

Марковські ланцюги (МЛ) є частковим випадком марковського процесу. **Марковський випадковий процес** описує поведінку стохастичної системи, в якій наставання чергового стану залежить тільки від безпосередньо попереднього стану системи, тобто для будь-якого моменту часу ймовірнісні характеристики процесу в майбутньому залежать тільки від його стану в цей момент часу та не залежать від того, коли і як система прийшла в цей стан.

Нехай деяка система може знаходитись в *k* різних станах *S1, S2,…,Sk*. Система може переходити з одного стану в другий миттєво і тільки в означені моменти часу (цей факт і визначає МЛ з дискретним часом), які будемо називати *кроком.* МЛ називається **однорідним**, якщо ймовірність переходу системи за один крок до іншого стану не залежить від номера кроку (не змінюється за часом).

За еволюцією системи спостерігають за допомогою *матриці* **перехідних ймовірностей (перехідної матриці).** Нехай *pij* – ймовірність переходу системи зі стану *Si* до стану *Sj* за один крок. Ці ймовірності і складають перехідну матрицю

.



Це квадратна матриця, якій притаманні такі властивості:

* всі елементи матриці як ймовірності ;



- , тобто сумарна ймовірність елементів рядка, що виражає ймовірність переходу системи зі стану *Si* до будь-якого іншого стану за один крок (в тому числі система може залишитись в тому же стані), дорівнює одиниці як ймовірність вірогідної події.



МЛ вважається повністю визначеним, коли сумісно з перехідною

матрицею задається **вектор початкових ймовірностей станів**



де *рj* – ймовірність знаходження системи у стані *Sj* в початковий момент часу. Властивості вектору аналогічні властивостям рядка матриці *Р*.



Нехай *рij(n)* – перехідна ймовірність МЛ за *n* кроків. Ці ймовірності

являються елементами відповідної перехідної матриці за *n* кроків

.



Встановлено, що зв'язок між матрицями *P(n)* і *P* виражається формулою

. (1)



Вектор ймовірностей станів за *n* переходів (кроків), компонентами якого являються ймовірності знаходження системи в тому чи іншому стані через *n* кроків

,



характеризує розвиток марковського процесу. Його можна знайти, використовуючи основні дані, якими задається марковський ланцюг, за формулою Маркова

. (2)



У процесі виводу формули (2) доводиться проміжна важлива формула

(3)



Формулою (2) користуються, коли цікавою є поведінка системи на порівняно короткому відрізку часу. Але важливіше дослідити поведінку системи на великому інтервалі часу, тобто в умовах, коли кількість переходів прямує до нескінченності.

Введемо поняття **регулярного марковського ланцюга***.* Це такий МЛ, який має хоча би один степінь перехідної матриці з ненульовими елементами, що означає існування такого моменту часу, коли система може опинитись у будь-якому зі своїх станів, незалежно від початкового розподілу ймовірностей. Для регулярного МЛ сформульована теорема Маркова.

Нехай *Р* – матриця переходу регулярного МЛ, тоді

а) існує , тобто кожний елемент матриці прямує до свого граничного значення;



б) рядки граничної матриці утворюють однаковий стохастичний вектор , тобто такий, який не змінюється при множенні його на матрицю *Р ()* ,



,



компоненти якого називаються *фінальними ймовірностями*.

Вектор фінальних ймовірностей характеризує поведінку системи в усталеному режимі і може бути знайденим із розв'язку системи

. (4)



**Приклад 3.8.1.** Марковський ланцюг з дискретним часом заданий матрицею переходу за один крок *Р* і вектором початкового розподілу ймовірностей станів



.



Знайти:

1. ймовірності знаходження системи в першому та другому станах за два кроки.
2. ймовірності знаходження системи в першому та другому станах за багато кроків.

**Розв'язання.**

1. За формулою Маркова

,



що припускає два можливих алгоритми дій:

а) знаходиться матриця *Р2*, яка зліва помножується на вектор :



; ;



б) множення виконується в такій послідовності:

,



тобто

.



1. Запишемо систему для знаходження вектору фінальних ймовірностей

.



Як бачимо, структура системи така, що матричне рівняння дає кількість рівнянь на одиницю менше, ніж розмір матриці переходу, тобто остаточний вигляд системи та її розв'язок є такими:

.



Остаточно запишемо

.



**3.9. Модель динамічного програмування в марковській задачі прийняття рішень**

Розглянемо дану задачу одразу на відповідному прикладі.

**Приклад 3.9.1.** Нехай система може знаходитись у трьох станах, які умовно розділимо на такі ознаки як *S1* - добрий, *S2* - задовільний та *S3* - поганий. В результаті спостережень протягом багатьох років помічено, що стан системи в поточному році залежить тільки від її стану в попередньому році. Тому ймовірності переходу системи з одного стану до іншого для кожного року можна уявити як перехідні ймовірності в ланцюгу Маркова.



Стан системи в наступному році

*S1 S2 S3*

Стан системи в поточному році .



В результаті різноманітних заходів, спрямованих на поліпшення стану системи вдається змінити перехідні ймовірності матриці *Р1*. Ці заходи приводять до нової матриці перехідних ймовірностей *Р2*.

*S1 S2 S3*

.



Щоб розглянути задачу прийняття рішень у перспективі, особа, що приймає рішення, пов'язує з переходом з одного стану в інший функцію доходу, яка визначає прибуток чи збиток за однорічний період в залежності від станів, між якими здійснюється перехід. Матриці *R1* та *R2* визначають функції доходу (в сотнях гр. од.) відповідно матрицям переходу *Р1* та *Р2* (тобто без додаткових заходів та з ними).

*S1 S2 S3 S1 S2 S3*

, .



Планується робота системи на *N* = 3 роки. При цьому необхідно визначити оптимальну стратегію поведінки (вживати додатних заходів чи ні) для кожного року, щоб прибуток за весь запланований період був максимальним.

**Розв'язання**

Задачу можна уявити як задачу динамічного програмування з кінцевою кількістю етапів таким чином. Нехай *m* = 1 або 2 означає дві можливі альтернативні стратегії (вживати заходи чи ні), тобто задані матриці *Рm* та *Rm*. Позначимо через оптимальний очікуваний доход, отриманий на етапах від *n* до *N* = 3 включно за умовою, що система знаходиться на початку етапу *n* у стані *j* . В такій постановці мова йде про алгоритм зворотної прогонки.



Рекурентне співвідношення, що пов'язує і можна записати у вигляді



, *n* =1,2,…,*N*,



де для всіх *j*. Наведене співвідношення засновано на тому, що дохід, який накопичується в результаті переходу зі стану *i* на етапі *n* до стану *j* на етапі *n* +1 з ймовірністю . Позначимо



,



тоді рекурентне співвідношення динамічного програмування можна записати таким чином:

,



, *n* =1,2,…,*N*-1.



Знайдемо значення для випадків, коли додаткові заходи не вживаються (*m* =1) та в протилежному випадку (*m* =2).



Для пояснення прокоментуємо значення : якщо стан системи добрий, то при одному переході річний дохід, що очікується, становить 5,3. Аналогічно, якщо стан системи задовільний, річний дохід, що очікується, становить 3, а в випадку поганого стану - -1.



Результати етапів, що планується, починаючи з останнього, заносимо в таблицю.

1. Планування 3 – тього року.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | | Оптимальний розв'язок | |
| *I* | *m=1* | *m*=2 | *f3(i)* | *m\** |
| 1 | 5,3 | 4,7 | 5,3 | 1 |
| 2 | 3 | 3,1 | 3,1 | 2 |
| 3 | -1 | 0,4 | 0,4 | 2 |

1. Планування 2 –го та 3 – го років.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | | Оптимальний  розв'язок | |
| *i* | *m=1* | *m=2* | *f2(i)* | *m\** |
| 1 |  |  | 8,19 | 2 |
| 2 |  |  | 5,61 | 2 |
| 3 |  |  | 2,13 | 2 |

1. Планування 13 років.



|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | | Оптимальний  розв'язок | |
| *і* | *m=1* | *m=2* | *f1(i)* | *m\** |
| 1 |  |  | 10,74 | 2 |
| 2 |  |  | 7,92 | 2 |
| 3 |  |  | 4,23 | 2 |

Оптимальний розв'язок демонструє, що в 1 – й та 2 – й роки особа, що приймає рішення, повинна використати додаткові засоби (*m* =2), незалежно від стану системи. На 3 – й рік керівнику належить використати додатні заходи тільки тоді, коли система знаходиться у станах 2 або 3 (тобто задовільному або поганому). Сумарний очікуваний прибуток за три роки складає *f1*(1) = 10,74 при гарному стані системи в 1 – й рік, *f1*(2) = 7,92 – при задовільному стані системи в 1 – й рік та *f1*(3) = 4,23 – при поганому стані.

## 3.10. Нелінійне програмування

## 3.10.1. Опуклі множини та опуклі функції

## Множина називається опуклою, якщо, разом із будь-якими двома точками вона містить усі точки відрізка, який з’єднує ці точки, тобто

** для всіх

Прикладами опуклих множин на площині є відрізок, внутрішність трикутника, коло, внутрішність параболи та ін.

Функція ** задана на опуклій множині ** називається опуклою на цій множині, якщо для будь-яких точок **і будь-якого ** справедлива нерівність

**  (1)

На рис. 1 зображена опукла функція Нерівність (1) означає, що функція ** в точках будь-якого відрізка ** не більша ніж в точках хорди .











**



Рис.3.10.1

На практиці використовують наступний критерій опуклості функції.

Критерій Сильвестра. Якщо усі кутові мінори матрицідодатні при , то функція  опукла на множині .

Приклад. Нехай

Знайти матрицю ** та з’ясувати чи є функція ** опуклою

Розв’язання. **

Опуклі функції відіграють велику роль у багатьох питаннях оптимізації оскільки будь-який локальний мінімум опуклої функції є одночасно і глобальним.

## 3.10.2. Безумовна оптимізація. Метод найшвидшого спуску

Якщо розглядається задача знаходження мінімуму функції n змінних ** на множині **, то кажуть про безумовну мінімізацію функції **.

Задача знаходження точки максимуму та максимального значення функції **зводиться до задачі мінімізації заміною ** на –** тому далі будуть розглядатися лише задачі на мінімізацію.

Для розв’язання задач безумовної мінімізації найчастіше застосовують наближені методи, в основі яких лежить обчислення похідних ** першого порядку. Такі методи звичайно називають градієнтними. Існують методи, які потребують обчислення похідних як 1-го так і 2-го порядку. Вони розглядатись не будуть. Нехай** опукла диференційована на усьому просторі** функція та треба знайти її точку мінімуму **[9]. Обравши довільне початкове наближення **будується послідовність

** (1)

де величини** (параметричні кроки) обираються достатньо малими для того щоб виконувалась умова

** (2)

Якщо при деякому **умова (2) не виконується, то крок **зменшують в задану кількість раз до виконання нерівності (2) та продовжують обчислення. Такий спосіб обрання кроку **визначає метод градієнтного спуску. Метод найшвидшого спуску відрізняється від способу градієнтного спуску способом обрання величини **, яка знаходиться з умови.

Такий вибір ** забезпечує максимально можливе зменшення функції ** в напрямі її антиградієнта ** в точці **. Таким чином , для визначення** на кожному кроці методу найшвидшого спуску розв’язується одновимірна задача мінімізації, для чого можна використати метод ділення відрізка навпіл.

В якості умови закінчення обчислень звичайно використовується близькість до нуля градієнта**, тобто

** або

Надалі обмежимось випадком мінімізації квадратичної функції

,

де . вектори – стовпці.

,

** симетрична матриця других похідних функції **,

Для квадратичної функції ** величина ** може бути знайдена у наявному вигляді

**,

де - скалярний добуток векторів ** з **.

Приклад 1. Мінімізувати квадратичну функцію методом найшвидшого спуску, якщо **,

Закінчити обчислення при **або .

Розв’язання. Крок 0. **, **,,** **

Обчислення **

**



**.

Крок 1. **

**

****

Обчислення **

, **

**

Наведемо послідовність (1) для даного прикладу. Результати обчислень

у таблиці 1.

Таблиця 1.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
| 0 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | -0.5 | 3.5 | 3.5352 |  |
| 1 | 0.5568 | 0.1023 | -0.2102 | 1.0341 | 0.1477 | 1.0446 | 04018 |
| 2 | 0.3580 | 0.0739 | -0.3151 | -0.0739 | 0.5170 | 0.5223 | 0.2009 |
| 3 | 0.3663 | 0.0151 | -0.3306 | 0.1528 | 0.0218 | 0.1543 | 0.0594 |
| 4 | 0.3370 | 0.0109 | -0.3329 | -0.0109 | 0.0764 | 0.0772 | 0.0297 |
| 5 | 0.3382 | 0.0022 | -0.3333 | 0.0226 | 0.0032 | 0.0228 | 0.0088 |

Градієнтні методи розв’язання задач нелінійного програмування (НП)

Один з підходів розв’язання задач НП полягає в такій модифікації градієнтних методів безумовної мінімізації, щоб у процесі побудови послідовних наближень до точки мінімуму враховувались обмеження на допустиму множину

Розглянемо задачу опуклого програмування

**

де **опукла замкнена множина, **– опукла, диференційована на **функція.

* + 1. Метод проекції градієнта

На кожній ітерації цього методу передбачена процедура повернення чергового наближення градієнтного спуску ** на допустиму множину **, якщо **. Таке повернення проводиться шляхом проектування ** на **, тобто заміною **на найближчу точку множини **.

Означення. Нехай задана замкнена множина **та точка . Точка називається проекцією точки на множину **, якщо

де відстань між точками **і **у просторі **. Зрозуміло, що для точки проекція співпадає с .

Таким чином, в методі проекції градієнта послідовні наближення **до точки мінімуму **цільової функції ** на множині **обчислюються за формулою

** (3)

Існують декілька способів обчислення . Так само, як і для безумовної мінімізації обмежимось випадком квадратичних функцій для яких обчислюється за формулою

Приклад. Розв’язати задачу НП методом проекції градієнта

**

Закінчити обчислення при 

Проекція точки на множину є такою

Послідовні кроки розв’язання задачі методом проекції градієнта наведені в таблиці 2.

Таблиця 2.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
| 0 | 4.0 | 1.0 | -67.0 | 18.0 | 6.0 | 18.9737 |  |
| 1 | 2.9024 | 0.6341 | -77.9756 | -1.7561 | 5.2683 | 5.5533 | 1.1569 |
| 2 | 3.3902 | 0.0000 | -82.2588 | 7.0244 | 2.3415 | 7.4044 | 0.8001 |
| 3 | 2.9619 | 0.0000 | -81.5377 | -0.6853 | 3.7145 | 3.7771 | 0.4283 |
| 4 | 3.2332 | 0.0000 | -84.2299 | 4.1968 | 2.0596 | 4.3295 | 0.2712 |
| 5 | 2.9869 | 0.0000 | -81.2434 | -0.2362 | 3.8756 | 3.8828 | 0.2463 |
| 6 | 3.1016 | 0.0000 | -84.8932 | 1.8287 | 0.2359 | 1.8539 | 0.1147 |
| 7 | 2.9986 | 0.0000 | -81.0530 | -0.0270 | 3.9734 | 3.9735 | 0.1031 |
| 8 | 3.0120 | 0.0000 | -84.9985 | 0.2158 | 0.0281 | 0.2177 | 0.0135 |

Для самостійної роботи студентам буде запропоновано задачі 1, 2 з завдання 10. Потрібно зробити два кроки градієнтного спуску, а також розв’язати ці задачі за допомогою комп’ютерних програм на мові PASCAL, розроблених авторами посібника.

Нижче наводяться деякі допустимі області  для яких задача проектування розв’язується в наявному вигляді.

1. (невід’ємний октант простору ).

2.(–вимірний паралелепіпед).

3. (замкнена куля з центром у точці  та радіуса ).

4. (Гіперплощина з нормальним вектором ).

5. (півпростір в ).

# ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

ЗАВДАННЯ 1. Дослідити функцію *y* = *f(x)* на екстремум та побудувати її графік. Знайти мінімальне та максимальне значення функції на вказаному проміжку.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Варіант | Функція | Проміжок |
| 1 |  |  |
| 2 |  |  |
| 3 |  |  |
| 4 |  |  |
| 5 |  |  |
| 6 |  |  |
| 7 |  |  |
| 8 |  |  |
| 9 |  |  |
| 10 |  |  |
| 11 |  |  |
| 12 |  |  |
| 13 |  |  |
| 14 |  |  |
| 15 |  |  |
| 16 |  |  |
| 17 |  |  |
| 18 |  |  |
| 19 |  |  |
| 20 |  |  |
| 21 |  |  |
| 22 |  |  |
| 23 |  |  |
| 24 |  |  |

ЗАВДАННЯ 2. Провести повне дослідження заданих функцій та побудувати ескізи їх графіків:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Варіант | Функція 1 | Функція 2 | Функція 3 |
| 1 |  |  |  |
| 2 |  |  |  |
| 3 |  |  |  |
| 4 |  |  |  |
| 5 |  |  |  |
| 6 |  |  |  |
| 7 |  |  |  |
| 8 |  |  |  |
| 9 |  |  |  |
| 10 |  |  |  |
| 11 |  |  |  |
| 12 |  |  |  |
| 13 |  |  |  |
| 14 |  |  |  |
| 15 |  |  |  |
| 16 |  |  |  |
| 17 |  |  |  |
| 18 |  |  |  |
| 19 |  |  |  |
| 20 |  |  |  |
| 21 |  |  |  |
| 22 |  |  |  |
| 23 |  |  |  |
| 24 |  |  |  |
| 25 |  |  |  |
| 26 |  |  |  |
| 27 |  |  |  |
| 28 |  |  |  |
| 29 |  |  |  |
| 30 |  |  |  |

ЗАВДАННЯ 3. Розв’язати систему нерівностей.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Варіант | Система | Варіант | Система |
| 1 |  | 16 |  |
| 2 |  | 17 |  |
| 3 |  | 18 |  |
| 4 |  | 19 |  |
| 5 |  | 20 |  |
| 6 |  | 21 |  |
| 7 |  | 22 |  |
| 8 |  | 23 |  |
| 9 |  | 24 |  |
| 10 |  | 25 |  |
| 11 |  | 26 |  |
| 12 |  | 27 |  |
| 13 |  | 28 |  |
| 14 |  | 29 |  |
| 15 |  | 30 |  |

**Завдання 4.**

1. Розв’язати задачу лінійного програмування

а) геометричним методом;

б) симплекс-методом.

2. Побудувати двоїсту задачу та двоїсту до двоїстої. Розв’язати двоїсту задачу геометрично і симплекс-методом. Перевірити виконання теорем двоїстості.

3. Розв’язати задачу з додатковою умовою цілочисельності методом Гоморі.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |

**Завдання 5.**

На *m* станціях зосереджено  одиниць однорідного продукту. Цей продукт треба перевезти до *n* споживачів , причому потреба кожного споживача складає , відповідно,  одиниць продукту. Вартість перевезення (тариф) одиниці продукту від постачальника до споживача  дорівнює  (вказані в таблиці).

1. Знайти опорний план методом найменшої вартості. Обчислити значення цільової функціï для цього плану.

2. Знайти опорний план методом північно-західного кута, обчислити значення цільової функціï для цього плану. Порівняти зі значенням цільової функціï із п.1).

3. Знайти оптимальний розв’язок задачі, виходячи з опорного плану, знайденого за методом найменшої вартості.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1.   |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | AІ | BJ | 80 | 140 | 110 | | 60 | | 4 | 3 | 5 | | 150 | | 10 | 1 | 2 | | 80 | | 3 | 8 | 6 | | 40 | | 6 | 4 | 9 | | 16.   |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | AІ | BJ | 112 | 105 | 108 | | 107 | | 7 | 5 | 4 | | 103 | | 4 | 9 | 5 | | 35 | | 8 | 6 | 2 | | 80 | | 3 | 5 | 1 | |
| 2.   |  |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | | AІ | BJ | 80 | 70 | 90 | 60 | 70 | | 120 | | 7 | 4 | 15 | 9 | 14 | | 150 | | 11 | 2 | 7 | 3 | 10 | | 100 | | 4 | 5 | 12 | 8 | 17 | | 17.   |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | | AІ | BJ | 45 | 55 | 75 | 85 | | 120 | | 4 | 5 | 2 | 6 | | 60 | | 1 | 4 | 8 | 3 | | 80 | | 5 | 6 | 1 | 9 | |
| 3.   |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | | AІ | BJ | 100 | 110 | 80 | 210 | | 120 | | 11 | 4 | 15 | 7 | | 130 | | 9 | 7 | 14 | 5 | | 150 | | 8 | 3 | 6 | 10 | | 18.   |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | | AІ | BJ | 20 | 25 | 35 | 40 | | 25 | | 12 | 15 | 14 | 10 | | 50 | | 16 | 20 | 28 | 17 | | 45 | | 19 | 21 | 16 | 13 | |
| 4.   |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | AІ | BJ | 110 | 135 | 120 | | 120 | | 7 | 2 | 4 | | 125 | | 3 | 8 | 9 | | 80 | | 1 | 3 | 9 | | 40 | | 6 | 4 | 2 | | 19.   |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | AІ | BJ | 140 | 145 | 45 | | 70 | | 7 | 4 | 1 | | 145 | | 5 | 9 | 8 | | 55 | | 3 | 8 | 3 | | 60 | | 3 | 1 | 4 | |
| 5.   |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | AІ | BJ | 120 | 130 | 140 | | 115 | | 3 | 2 | 6 | | 125 | | 8 | 7 | 2 | | 50 | | 4 | 1 | 7 | | 100 | | 3 | 5 | 1 | | 20.   |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | AІ | BJ | 10 | 16 | 14 | | 8 | | 3 | 7 | 3 | | 10 | | 2 | 1 | 5 | | 7 | | 2 | 5 | 1 | | 15 | | 4 | 2 | 7 | |
| 6.   |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | AІ | BJ | 10 | 17 | 18 | | 10 | | 3 | 5 | 2 | | 9 | | 2 | 6 | 9 | | 14 | | 5 | 2 | 8 | | 12 | | 4 | 1 | 3 | | 21.   |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | AІ | BJ | 115 | 119 | 111 | | 117 | | 2 | 1 | 6 | | 50 | | 1 | 7 | 4 | | 110 | | 4 | 2 | 8 | | 68 | | 3 | 1 | 2 | |
| 7.   |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | | AІ | BJ | 150 | 110 | 100 | 140 | | 220 | | 2 | 4 | 7 | 11 | | 120 | | 6 | 1 | 5 | 2 | | 160 | | 1 | 9 | 5 | 12 | | 22.   |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | | AІ | BJ | 160 | 90 | 80 | 70 | | 170 | | 3 | 3 | 4 | 5 | | 120 | | 8 | 9 | 3 | 1 | | 110 | | 2 | 1 | 8 | 3 | |
| 8.   |  |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | | AІ | BJ | 90 | 120 | 110 | 130 | 70 | | 175 | | 12 | 9 | 7 | 11 | 6 | | 165 | | 4 | 3 | 12 | 2 | 8 | | 180 | | 5 | 17 | 9 | 4 | 11 | | 23.   |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | | AІ | BJ | 100 | 110 | 120 | 130 | | 220 | | 11 | 2 | 3 | 9 | | 150 | | 12 | 4 | 10 | 20 | | 90 | | 18 | 5 | 1 | 6 | |
| 9.   |  |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | | AІ | BJ | 130 | 230 | 190 | 160 | 120 | | 260 | | 2 | 4 | 11 | 5 | 3 | | 300 | | 8 | 17 | 13 | 7 | 6 | | 270 | | 14 | 10 | 5 | 8 | 9 | | 24.   |  |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | | AІ | BJ | 100 | 90 | 160 | 150 | 80 | | 150 | | 2 | 10 | 15 | 14 | 4 | | 170 | | 3 | 7 | 12 | 5 | 8 | | 260 | | 1 | 18 | 6 | 13 | 16 | |
| 10.   |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | АІ | BJ | 150 | 130 | 120 | | 125 | | 6 | 3 | 4 | | 115 | | 4 | 7 | 2 | | 60 | | 8 | 5 | 9 | | 100 | | 3 | 7 | 2 | | 25.   |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | AІ | BJ | 120 | 130 | 140 | | 115 | | 6 | 7 | 5 | | 100 | | 3 | 7 | 1 | | 125 | | 2 | 3 | 4 | | 50 | | 8 | 2 | 1 | |
| 11.   |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | AІ | BJ | 120 | 170 | 110 | | 90 | | 6 | 4 | 2 | | 100 | | 3 | 5 | 7 | | 80 | | 1 | 4 | 6 | | 130 | | 5 | 6 | 8 | | 26.   |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | AІ | BJ | 16 | 14 | 10 | | 17 | | 2 | 1 | 3 | | 11 | | 4 | 2 | 4 | | 5 | | 1 | 3 | 5 | | 7 | | 4 | 7 | 1 | |
| 12.   |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | AІ | BJ | 19 | 13 | 18 | | 17 | | 3 | 1 | 2 | | 10 | | 4 | 2 | 6 | | 12 | | 2 | 3 | 4 | | 11 | | 3 | 7 | 1 | | 27.   |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | AІ | BJ | 11 | 10 | 19 | | 6 | | 9 | 5 | 3 | | 13 | | 4 | 1 | 9 | | 12 | | 3 | 2 | 1 | | 9 | | 4 | 5 | 6 | |
| 13.   |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | | AІ | BJ | 120 | 50 | 190 | 110 | | 160 | | 7 | 8 | 1 | 2 | | 140 | | 4 | 5 | 9 | 8 | | 170 | | 9 | 2 | 3 | 6 | | 28.   |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | | AІ | BJ | 7 | 8 | 15 | 10 | | 16 | | 2 | 5 | 5 | 4 | | 18 | | 4 | 7 | 2 | 9 | | 6 | | 3 | 2 | 1 | 2 | |
| 14.   |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | | AІ | BJ | 80 | 60 | 30 | 90 | | 70 | | 3 | 7 | 5 | 2 | | 45 | | 5 | 3 | 4 | 7 | | 90 | | 2 | 1 | 8 | 5 | | 55 | | 5 | 7 | 2 | 8 | | 29.   |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | AІ | BІ | 120 | 150 | 130 | | 140 | | 5 | 8 | 4 | | 110 | | 3 | 1 | 8 | | 50 | | 7 | 3 | 6 | | 100 | | 4 | 9 | 6 | |
| 15.   |  |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | | AІ | BJ | 70 | 120 | 105 | 125 | 110 | | 120 | | 14 | 8 | 17 | 5 | 3 | | 180 | | 21 | 10 | 7 | 11 | 6 | | 230 | | 3 | 5 | 8 | 4 | 9 | | 30.   |  |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | | AІ | BJ | 300 | 280 | 330 | 290 | 100 | | 370 | | 21 | 18 | 14 | 3 | 4 | | 450 | | 7 | 11 | 10 | 5 | 12 | | 480 | | 4 | 8 | 16 | 9 | 13 | |

ЗАВДАННЯ 6.Розв’язати задачу розподілу ресурсів методом динамічного програмування.

Підприємствам *P* і *Q* на 4 роки виділено гр. од. При наданні об’єкту *Р* *х* гр. од. на рік їм забезпечується прибуток *f1х* гр. од. і залишок *g1х* гр. од. При отриманні *у* гр. од. на рік підприємством *Q* їмзабезпечується прибуток *f2у* гр. од. і залишок *g2у* гр. од. Як розподілити всі кошти між об’єктами *Р* і *Q*, щоб спільний прибуток за весь період, що планується, був максимальним?

Варіанти завдань наведені в таблиці:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *1)* | *f1 = 2.8; g1 = 0.5;*  *f2 =3.5; g2 = 0.3;*  *= 2000* | *2)* | *f1 = 2.8; g1 = 0.5;*  *f2 =3.6; g2 = 0.25;*  *= 2000* | *3)* | *f1 = 2.9; g1 = 0.7;*  *f2= 3.7; g2 = 0.5;*  *= 2000* |
| *4)* | *f1 = 3.1; g1 = 0.6;*  *f2 =4.1; g2 = 0.4;*  *= 1500* | *5)* | *f1 = 3.2; g1 = 0.3;*  *f2 =4.8; g2 = 0.2;*  *= 1500* | *6)* | *f1 = 3.3; g1 = 0.65;*  *f2= 4.3; g2 = 0.5;*  *= 1500* |
| *7)* | *f1 = 3.5; g1 = 0.5;*  *f2 =4.7; g2 = 0.3;*  *= 1900* | *8)* | *f1 = 3.7; g1 = 0.5;*  *f2 =4.8; g2 = 0.2;*  *= 1900* | *9)* | *f1 = 3.9; g1 = 0.55;*  *f2= 5.4; g2 = 0.3;*  *= 1900* |
| *10)* | *f1 = 4.1; g1 = 0.7;*  *f2 =5.5; g2 = 0.5;*  *= 1600* | *11)* | *f1 = 4.2; g1 = 0.6;*  *f2 =5.4; g2 = 0.4;*  *= 1600* | *12)* | *f1 = 4.7; g1 = 0.4;*  *f2= 5.3; g2 = 0.25;*  *= 1600* |
| *13)* | *f1 = 4.5; g1 = 0.5;*  *f2 =5.1; g2 = 0.35;*  *= 1700* | *14)* | *f1 = 4.6; g1 = 0.6;*  *f2 =5.4; g2 = 0.4;*  *= 1700* | *15)* | *f1 = 4.3; g1 = 0.6;*  *f2= 5.4; g2 = 0.5;*  *= 1700* |
| *16)* | *f1 = 3.8; g1 = 0.3;*  *f2 =6.1; g2 = 0.45;*  *= 1400* | *17)* | *f1 = 3.9; g1 = 0.25;*  *f2 =2.8; g2 = 0.5;*  *= 1400* | *18)* | *f1 = 6.5; g1 = 0.3;*  *f2= 4.7; g2 = 0.7;*  *= 1400* |
| *19)* | *f1 = 6.1; g1 = 0.4;*  *f2 =4.3; g2 = 0.55;*  *= 1300* | *20)* | *f1 = 6.2; g1 = 0.55;*  *f2 =4.4; g2 = 0.75;*  *= 1300* | *21)* | *f1 = 6.3; g1 = 0.4;*  *f2= 4.5; g2 = 0.6;*  *= 1300* |
| *22)* | *f1 = 5.1; g1 = 0.4;*  *f2 =2.6; g2 = 0.75;*  *= 1200* | *23)* | *f1 = 5.0; g1 = 0.4;*  *f2 =3.6; g2 = 0.65;*  *= 1200* | *24)* | *f1 = 4.9; g1 = 0.3;*  *f2= 3.8; g2 = 0.5;*  *= 1200* |
| *25)* | *f1 = 6.0; g1 = 0.45;*  *f2 =4.1; g2 = 0.7;*  *= 1100* | *26)* | *f1 = 6.1; g1 = 0.25;*  *f2 =4.2; g2 = 0.6;*  *= 1100* | *27)* | *f1 = 6.2; g1 = 0.35;*  *f2= 4.2; g2 = 0.7;*  *= 1100* |
| *28)* | *f1 = 6.6; g1 = 0.4;*  *f2 =4.2; g2 = 0.85;*  *= 1000* | *29)* | *f1 = 6.4; g1 = 0.4;*  *f2 =4.1; g2 = 0.75;*  *= 1000* | *30)* | *f1 = 6.5; g1 = 0.5;*  *f2= 4.0; g2 = 0.65;*  *= 1000* |

ЗАВДАННЯ 7.Вибрати оптимальні стратегії в умовах невизначеності та розв’язати матричну гру.

Задача 1.Задана матриця прибутку (витрат) *А*. Вибрати оптимальні стратегії прийняття рішень в умовах невизначеності, застосовуючи:

а) критерій Лапласа;

б) максімінний (мінімаксний) критерій;

в) критерій Севіджа;

г) критерій Гурвіца.

Задача 2. Задано платіжну матрицю *А*. Розв’язати матричну гру в мішаних стратегіях, попередньо спростивши задану матрицю.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1) | 2) | 3) |
| 4) | 5) | 6) |
| 7) | 8) | 9) |
| 10) | 11) | 12) |
| 13) | 14) | 15) |
| 16) | 17) | 18) |
| 19) | 20) | 21) |
| 22) | 23) | 24) |
| 25) | 26) |  |
| 28) | 29) | 30) |

ЗАВДАННЯ 8. Обчислити ймовірнісні характеристики марківського ланцюга з дискретним часом. Розв’язати марківську задачу прийняття рішень за допомогою моделі динамічного програмування.

Задача 1.Для марківського ланцюга з дискретним часом системи, що знаходиться у двох станах, задані матриця переходу за один крок *Р* та вектор початкового розподілу ймовірностей . Потрібно:

* побудувати граф марківського ланцюга;
* знайти ймовірності знаходження системи в першому та другому станах за два кроки;
* знайти ймовірності знаходження системи в першому та другому станах за багато кроків.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *№* | *Р* |  |  | *№* | *Р* |  |  | *№* | *Р* |  |
| 11 |  |  |  | 111 |  |  |  | 221 |  |  |
| 22 |  |  |  | 212 |  |  |  | 222 |  |  |
| 33 |  |  |  | 313 |  |  |  | 223 |  |  |
| 44 |  |  |  | 414 |  |  |  | 224 |  |  |
| 55 |  |  |  | 515 |  |  |  | 225 |  |  |
| 66 |  |  |  | 616 |  |  |  | 226 |  |  |
| 77 |  |  |  | 717 |  |  |  | 227 |  |  |
| 88 |  |  |  | 818 |  |  |  | 228 |  |  |
| 99 |  |  |  | 919 |  |  |  | 229 |  |  |
| 110 |  |  |  | 120 |  |  |  | 330 |  |  |

Задача 2. Нехай стан ґрунту сільськогосподарського підприємства оцінюється як *S1* – добрий, *S2* - задовільний, *S3* – поганий, при цьому якість ґрунту в поточному році залежить від його якості в попередньому році.

Задані: 1) матриці *Р1* та *Р2* перехідних ймовірностей станів ґрунту за один крок без додаткових заходів для поліпшення стану ґрунту та при здійсненні заходів по удобренню ґрунту; 2) відповідні матриці доходу *R1* та *R2*.

Планується робота сільськогосподарського підприємства на 3 роки. Необхідно визначити оптимальну стратегію поведінки (вживати удобрення чи ні) для кожного року, щоб прибуток від використання ґрунту був максимальним.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| № | *Р1* | *Р2* | *R1* | *R2* |
| 1 |  |  |  |  |
| 2 |  |  |  |  |
| 3 |  |  |  |  |
| 4 |  |  |  |  |
| 5 |  |  |  |  |
| 6 |  |  |  |  |
| 7 |  |  |  |  |
| 8 |  |  |  |  |
| 9 |  |  |  |  |
| 10 |  |  |  |  |
| 11 |  |  |  |  |
| 12 |  |  |  |  |
| 13 |  |  |  |  |
| 14 |  |  |  |  |
| 15 |  |  |  |  |
| 16 |  |  |  |  |
| 17 |  |  |  |  |
| 18 |  |  |  |  |
| 19 |  |  |  |  |
| 20 |  |  |  |  |
| 21 |  |  |  |  |
| 22 |  |  |  |  |
| 23 |  |  |  |  |
| 24 |  |  |  |  |
| 25 |  |  |  |  |
| 26 |  |  |  |  |
| 27 |  |  |  |  |
| 28 |  |  |  |  |
| 29 |  |  |  |  |
| 30 |  |  |  |  |

ЗАВДАННЯ 9.Задача 1.Мінімізувати квадратичні функції методом найшвидшого спуску. Закінчити обчислення при .



2.

3.

4. .

5.

6.

7.

8.

9.

10.

11.

12.

13.

14.

15.

16.

17. .

18.

19. .

20.

Задача 2. Розв’язати наступні задачі нелінійного програмування методом проекції градієнта. Закінчити обчислення при .

1. ,
2. ,
4. ,

Додаток 1. ДЕЯКІ ВІДОМОСТІ З АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

Д1. Різні види рівнянь прямої на площині

Нехай на площині впроваджена прямокутна система координат *хОу.* Завдання деякої лінії на площині рівнозначно визначенню співвідношення між координатами точок цієї лінії. Використовуючи ці співвідношення, можна установити, належить та чи інша точка розглянутій лінії чи ні.

Означення 1. Рівняння  називається рівнянням лінії , якщо цьому рівнянню задовольняють координати будь-якої точки цієї лінії і не задовольняють координати точки, що не належать цій лінії:

.

Одержимо рівняння прямої *l,* яка проходить через задану точку  і паралельна заданому ненульовому вектору, який називається базисним (напрямним)вектором цієї прямої (рис.1).

*y*

*x*















Рис.1.1

Нехай *-* довільна точка прямої *l*. Тоді вектори  та  колінеарні, звідки випливає, шо (1)

або система двох координатних рівнянь

 (2)

Рівняння (1) навівають канонічним (стандартним) рівнянням прямої,а систему (2) параметричними рівняннями прямої*.* Змінна  називається параметром Запишемо рівняння (1) в еквівалентній йому формта впровадимо позначення .

і. Тоді останнє рівняння набуде вигляду:

 (3)

Рівняння (3) називається загальним рівнянням прямої на площині*.* Ненульовий вектор є перпендикулярним до базисного вектора, оскільки  .

Якщо *В*≠0*,* то з рівняння (3) одержимо

*,* (4)

де число дорівнює тангенсу кута  нахилу прямої до осі *0х*. Рівняння (4) називається рівнянням з кутовим коефіцієнтом. При *В=*0 з (3) одержимо рівняння прямої, що паралельна осі *Оу*

*.* (5)

Отже, будь яку пряму на площині можна задати рівнянням першого степеня відносно координат *x* та *y* точки прямої.Має місце і обернене твердження: будь-яке рівняння першого степеня ** (хоча б один з коефіцієнтів *А, В* не дорівнює нулю) описує на площині *х0у* деяку пряму.

В тому випадку, коли пряма задана двома точками  та , базисний вектор прямої . Отже, рівнянню (1) можна надати форму (6)

 (6)

яка називається рівнянням прямої, що проходить через дві точки. У випадку, якщо пряма проходить через точки  та , то її рівняння приймає вигляд

|  |  |
| --- | --- |
| Рис.1.2 | . ()  Рівняння () називають рівнянням прямої у відрізках на осях координат(рис.1.2) |

Відзначимо, що якщо в (3)1) *С* = 0⇔ пряма проходить через початок координат,

2) *А* = 0⇔ пряма паралельна осі *Ох;* 3) *В* = 0⇔ пряма паралельна осі *Оу.*

Д2. Відстань від точки до прямої

|  |  |
| --- | --- |
| Рис.1.3 | Нехай необхідно знайти відстань  від точки  до прямої  (рис.1.3). Позначимо через  координати точки . Тоді |

Отже, і відстань . . Величину числа t знайдемо підстановкою координат точки  в рівняння прямої:



. Отже,  (7)

Приклад 1.2.1. а) Записати канонічне рівняння прямої , яка проходить через точки  ,  та привести його до загального вигляду; б) Знайти відстань  від точки до прямої .

Розв'язання. а) За формулою (6) 

; б) за формулою (7) .

Д3. Розв'язання систем лінійних нерівностей

Пряма ** ділить площину на дві півплощини. Щоб розв'язати нерівність **, треба узяти будь-яку точку у будь-якій півплощині. Якщо для цієї точки нерівність виконується, то вона виконується для усіх точок цієї півплощини. Якщо не виконується, то розв'язком нерівності є множина точок іншої півплощини.

Приклад 1.3.1. Розв'язати нерівність *.*











|  |  |
| --- | --- |
| Рис.1.4 | Розв'язання. Будуємо графік прямої . Для точки (0;0) нерівність виконується. Тому розв'язок нерівності заштрихована півплощина рис.1.4). |

Приклад 1.3.2. Розв'язати систему нерівностей  *.*

Розв'язання. 1.На кожній з прямих обираємо по 2 точки та будуємо графіки цих прямих

|  |  |
| --- | --- |
| Рис.15 | 2. Розв'язок кожної нерівності позначаємо двома стрілками.  3. Знаходимо перетин (загальну частину) 3-х півплощин (заштрихована, рис.1.5), трикутник. |

1.4.Обчислення кута між двома прямими

Нехай є дві прямі (які позначимо цифрами 1 та 2), кутові коефіцієнти яких є ** та **, а кути нахилу цих прямих до осі **, відповідно, ** та



2

1







*x*

y

Рис.1.6

**. Кут між цими прямими ** За відомою формулою тригонометрії **.

Оскільки , то **. Це і є формула для обчислення кута між двома прямими. З неї випливає як ознака паралельності двох прямих: **та  так і ознака перпендикулярності двох прямих: **.

Похідна неявної функції

Нехай задана не сама функція  , а лише рівняння . Ліва частина цієї тотожності є складеною функцією від , похідна якої лінійна відносно . Похідна тотожності:



Приклад 1.5.1. Знайти похідну від функції , яка неявно задана рівнянням: .

Розв’язання. Знайдемо похідну по  від тотожності

:=0. Отже, . Зокрема, якщо  ( зрозуміло, що точка(1:0) задовольняє рівнянню), то  , отже, рівняння дотичної в точці (1; 0) має вигляд  = .

# ПІСЛЯМОВА

У методичних рекомендаціях з дисципліни «Методи оптимізації» розкрито основні положення методів лінійного, нелінійного, динамічного програмування, теорії ігор та прийняття рішень в умовах невизначеності, марківських задач прийняття рішень. Наведено приклади розв’язання задач з розгорнутими поясненнями, варіанти завдань для виконання індивідуальних робіт.

У відповідних розділах показано практичне застосування методів лінійного та динамічного програмування до задач розподілу ресурсів.

Цінність роботи полягає в ілюстрації основних понять і теорії великою кількістю розв’язаних задач. Наведено зразки виконання завдань, що дозволяє студентам самостійно опановувати матеріал з відповідних розділів дисципліни

«Методи оптимізації».

Методичні рекомендації призначені для бакалаврів та магістрів гуманітарних спеціальностей. Оскільки студенти цих спеціальностей не вивчають докладно математичний аналіз та аналітичну геометрію, в першому та другому розділах наведено необхідний матеріал з диференціального числення функцій однієї та кількох змінних. В додатку подано необхідні відомості з аналітичної геометрії.

# Рекомендована література

1. Босін М. Є. Методи оптимізації: навч. посібник / Босін М. Є., Русскін В. М.–Х. Комунальний заклад «Харківська гуманітарно-педагогічна академія» Харківської обласної ради, 2015.­­ – 147 с.
2. Волошин О. Ф. Моделі та методи прийняття рішень: навч. посібн. для студ. вищих навч. закл. / О. Ф. Волошин, С. О. Мащенко. – К.: Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2010. – 336 с.
3. Жалдак М. І., Триус Ю. В. Основи теорії і методів оптимізації: навчальний посібник / М. І. Жалдак, Ю. В. Триус. – Черкаси: Брама-Україна, 2005. – 608 с.
4. Зайченко Ю. П. Дослідження операцій: зб. задач / Ю. П. Зайченко. – К.: Видавнічий дім Слово, 2006. – 816 с.
5. Математичні методи дослідження операцій : підручник / Є. А. Лавров, Л. П. Перхун, В. В. Шендрик та ін. – Суми : Сумський державний університет, 2017. – 212 с.
6. Могульський Є. З., Бородай Г. П., Драгаченко А. О. Диференціальне та інтегральне числення: навч. посібник / Є. З. Могульський, Г. П. Бородай, А. О. Драгаченко. – Харків: УкрДАЗТ, 2011. – 311с.
7. Методи оптимізації і дослідження операцій: навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. / Н.О. Гончарова, А. І. Ігнатюк, Н. А. Малиш та ін. – К.: МАУГІ, 2005.– 304 с.
8. Попов Ю. Д., Тюптя В. І., Шевченко В. І. Методи оптимізації: навч. електр-й посібник для студ-в / Ю. Д. Попов, В. І.  Тюптя, В. І. Шевченко. − Київ: КНУ імені Тараса Шевченка, 2003.−215 с.
9. Ржевський С. В., Александрова В. М. Дослідження операцій: підручник / С. В. Ржевський, В. М. Александрова. – К.: Академвидав, 2006. – 558 с.
10. Самуельсон П. А., Нордгауз В. Д. Методи оптимізації і дослідження операцій: пер. з англ. / за ред. С. Панчишина. – К.: Основа, 1998. – 676 с.

Рис 3.1

*O*

*B*













ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

|  |  |
| --- | --- |
| Безумовна оптимізація 85 | Марковський ланцюг 71 |
|  | Матриця перехідних ймовірностей 69 |
| Відстань від точки до прямої 103 | Метод найменших квадратів 30 |
|  | –– найшвидшого спуску 80 |
| Градієнт 21 | –– мінімальної вартості 50 |
|  | –– потенціалів 55 |
| Двоїста задача 43 | –– проекції градієнта 83 |
| Динамічне програмування 60 | Мішані стратегії 62 |
| Домінуючі стратегії 64 |  |
| Екстремум локальний 12 | Ознака монотонності 6 |
| –– умовний 26 | Опуклість функції 10, 79 |
| ––функції двох змінних 24 |  |
|  | Похідна неявної функції 105 |
| Жорданове перетворення 37 | –– частинна 18 |
|  | –– за напрямом 21 |
| Задача лінійного програмування 33 | Принцип оптимальності 56 |
| ––цілочисельного програмування 41 |  |
|  | Рівняння прямої 101 |
| Критерій Гурвиця 67 |  |
| –– Лапласа 66 | Теорія ігор 60 |
| –– мінімаксний 67 | Теорема двоїстості 47 |
| ––Севіджа 67 | . –– Фон Неймана 62 |
| Кут між двома прямими 105 | Транспортна задача 48 |
|  |  |
| Лінія рівня 22 |  |